KARAKTERISTIK FUNGSI DISTRIBUSI *FOUR-PARAMETER GENERALIZED-t*

Rahman Cahyadi[1], Warsono[2], Mustofa Usman[3], Dian Kurniasari [4]
[1]Pendidikan Matematika, STKIP Muhammadiyah Pringsewu
Email: rahman_cahyadi@yahoo.com
[2]Matematika, Universitas Lampung
[3]Matematika, Universitas Lampung
[4]Matematika, Universitas Lampung

Abstract

This research is about the characteristic function of four-parameter generalized t distribution. Four-parameter generalized t distribution has four parameters which are μ as a location parameter, σ as a scale parameter, p and q as a shape parameter, and B as a function of beta. The characteristic function are retrieved from the expectation of e^{itx}, where i as a imaginary number. Then, the characteristic function of four-parameter generalized t distribution was able to be determined by using definition and trigonometric expansions. Based on those two methods this study got the same results and then will be continued proving the fundamental properties of the characteristic function of four-parameter generalized t distribution. Furthermore, it needs graph simulation on a characteristic function of four-parameter generalized t distribution. Graph simulation result on the characteristic function of four- parameter generalized t distribution was formed a closed curve (circle) are smooth.

Keywords: *four-parameter generalized t distribution, characteristic function, graph simulation*

1. PENDAHULUAN

Distribusi t merupakan salah satu dari keluarga distribusi peluang kontinu yang penurunannya berdasarkan distribusi normal baku dan distribusi khi-kuadrat. Distribusi *four-parameter generalized t* merupakan bentuk perumuman dari *distribusi t* dengan menambahkan lagi parameter yang lain. Distribusi *four-parameter generalized t* memiliki empat parameter yaitu parameter bentuk (p,q), parameter lokasi (μ), dan parameter skala (σ) serta B sebagai fungsi beta. Sudah banyak peneliti yang membahas tentang distribusi *four-parameter generalized t* diantaranya yaitu: McDonald dan Newey (1988), Boyer dkk (2003), Chan dkk (2007), Lee dkk (2012).

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistika. Fungsi karakteristik dapat digunakan untuk menentukan fungsi distribusi dari suatu peubah acak yang dikenal sebagai teorema inversi fungsi karakteristik. Teorema inversi fungsi karakteristik merupakan salah satu sifat yang menjadi ciri khas fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik juga memiliki sifat-sifat dasar. Namun demikian, sejauh penelusuran yang telah penulis lakukan bahwa belum ditemukan penjelasan tentang fungsi karakteristik khususnya fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t*.

Pada penelitian ini, penulis akan membahas lebih dalam mengenai fungsi karakteristik, dan pembuktian sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* (1), kemudian akan dilanjutkan dengan melakukan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan *software MATLAB R2010b*. Menurut McDonald dan Newey (1988) distribusi *generalized t* memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk :

$$GT(x;\mu,\sigma,p,q)=\frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}}$$

for $-\infty < x < \infty$ (1)

Dimana μ ∈ R adalah parameter lokasi , $\sigma > 0$ adalah parameter skala , $p > 0$ dan $q > 0$ keduanya parameter bentuk dan B (.) Apakah fungsi beta (Chan et al , 2007),

Fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dapat diperoleh dari fungsi pembangkit momen dengan menambahkan *i* sebagai bagian imaginer dan ekspansi trigonometri. Dalam penelitian ini digunakan dua cara tersebut untuk mencari fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t*. Selanjutnya akan dibuktikan sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dan melakukan simulasi grafik gambar fungsi kepekatan peluang dan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t*. Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan dalam penelitian ini akan dibahas kajian tentang “Fungsi Karakteristik dari Distribusi *four-parameter generalized t*”.

2. PEMBAHASAN

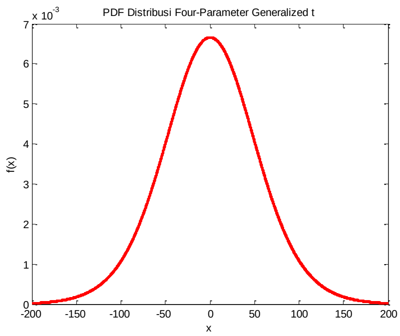
1) Distribusi Four-Parameter Generalized t

Suatu peubah acak X dikatakan memiliki distribusi generalized t , dengan parameter σ, μ, p dan q , dan jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluang dari X adalah

$$GT(x;\mu,\sigma,p,q)=\frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}}$$

for $-\infty<x<\infty$ (2)

Dimana $\mu\in R$ adalah parameter lokasi , $\sigma>0$ adalah parameter skala , $p>0$ dan $q>0$ keduanya parameter bentuk dan B (.) Adalah fungsi beta (Chan et al, 2007).

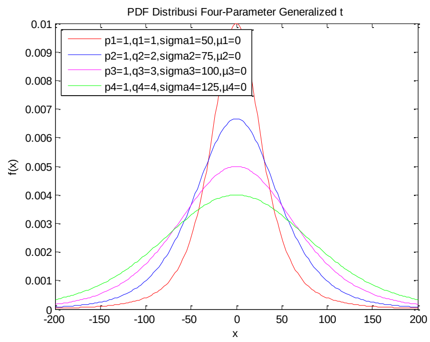


Gambar 1. Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=1, q=20, σ=100, μ=0

2) Simulasi Grafik Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi *Four-Parameter Generalized t*

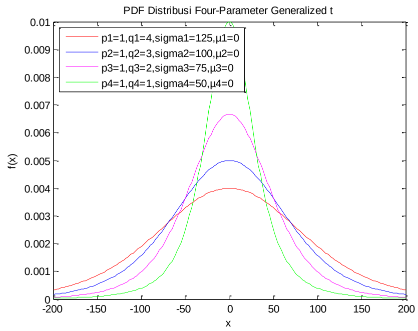
Pada bagian ini akan dibahas mengenai simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari ditribusi *four-parameter generalized t* dengan menggunakan software MATLAB **R**2010**b**.

(1) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p tetap, q meningkat, σ meningkat, μ tetap



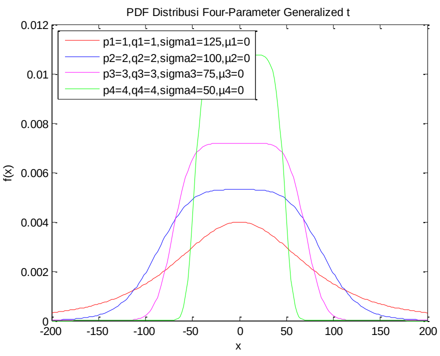
Gambar 2. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=1, q=(1,2,3,4), σ=(50,75,100,125), μ=0

(2) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p tetap, q menurun, σ menurun, μ tetap



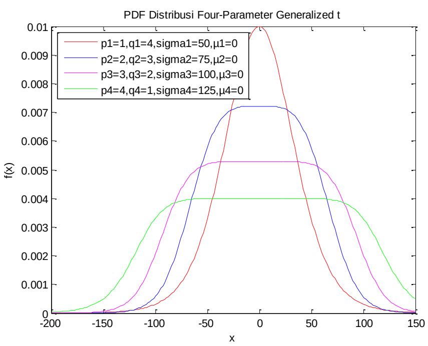
Gambar 3. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=1, q=(4,3,2,1), σ=(125,100,75,50), μ=0

(3) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p meningkat, q meningkat, σ menurun, μ tetap



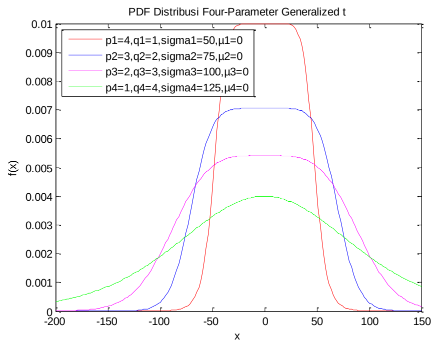
Gambar 4. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=(1,2,3,4), q=(1,2,3,4), σ=(125,100,75,50), μ=0

(4) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p meningkat, q menurun, σ meningkat, μ tetap



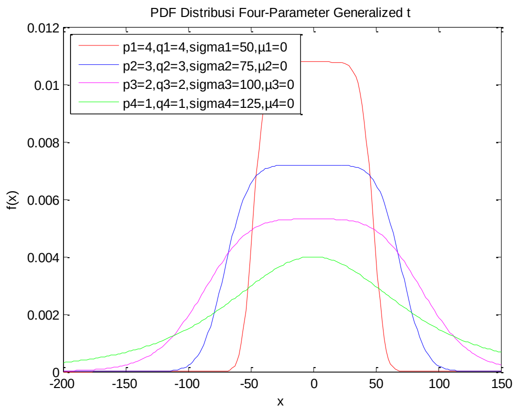
Gambar 5. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=(1,2,3,4), q=(4,3,2,1), σ=(50,75,100,125), μ=0

(5) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p menurun, q meningkat, σ meningkat, μ tetap



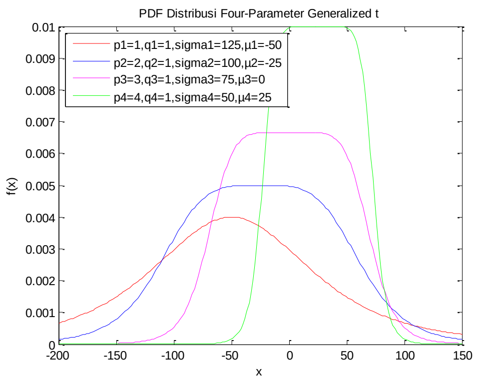
Gambar 6. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=(4,3,2,1), q=(1,2,3,4), σ=(50,75,100,125), μ=0

(6) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p menurun, q menurun, σ meningkat, μ tetap



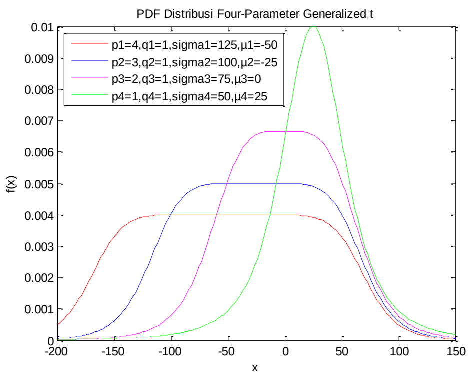
Gambar 7. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=(4,3,2,1), q=(4,3,2,1), σ=(50,75,100,125), μ=0

(7) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p meningkat, q tetap, σ menurun, μ berbeda



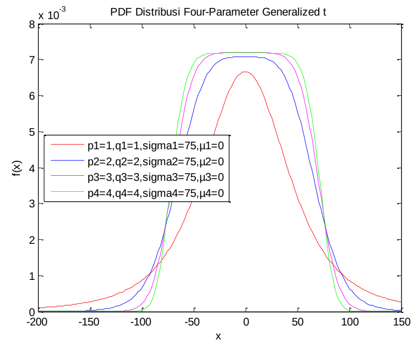
Gambar 8. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan *p*=(1,2,3,4), *q*=1, σ=(125,100,75,50), μ=(-50,-25,0,25)

(8) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai *p* menurun, *q* tetap, σ menurun, μ berbeda



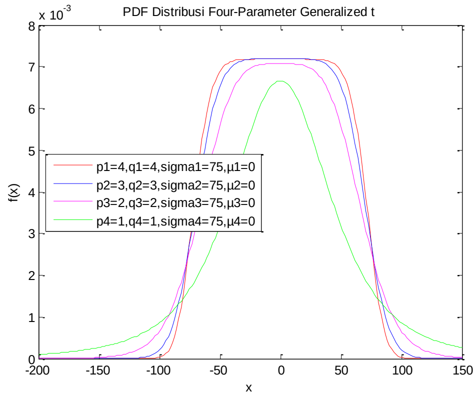
Gambar 9. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan *p*=(4,3,2,1), *q*=1, σ=(125,100,75,50), μ=(-50,-25,0,25)

(9) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai *p* meningkat, *q* meningkat, σ tetap, μ tetap



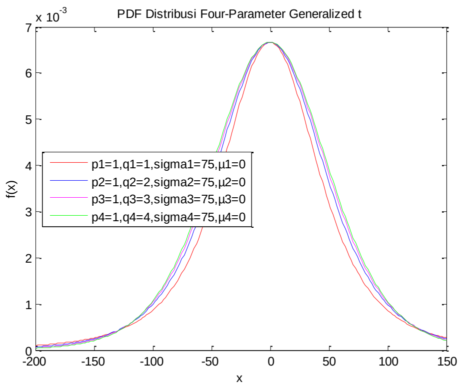
Gambar 10. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan *p*=(1,2,3,4), *q*=(1,2,3,4), σ=75, μ=0

(10) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai *p* menurun, *q* menurun, σ tetap, μ tetap



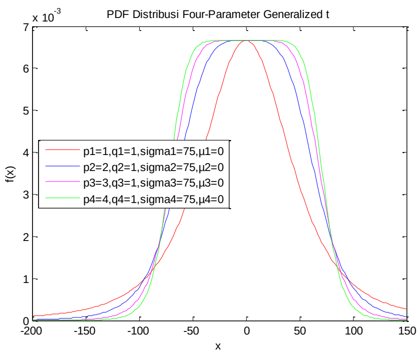
Gambar 11. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan *p*=(4,3,2,1), *q*=(4,3,2,1), σ=75, μ=0

(11) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai *p* tetap, *q* meningkat, σ tetap, μ tetap



Gambar 12. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=1, q=(1,2,3,4), σ=75, μ=0

(12) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai p meningkat, q tetap, σ tetap, μ tetap



Gambar 13. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=(1,2,3,4), q=1, σ=75, μ=0

Dari gambar grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dapat di lihat bahwa σ adalah parameter skala, p dan q adalah parameter bentuk sehingga semakin menurun nilai σ maka semakin kecil skala dari grafik yang terbentuk dan sebaliknya, semakin meningkat nilai σ maka semakin besar skala dari grafik yang terbentuk. Sedangkan puncak grafik yang terbentuk dipengaruhi oleh meningkat atau menurun nilai p dan q. Kemudian μ adalah parameter lokasi sehingga dapat di lihat pada gambar bahwa grafik selalu simetri pada μ.

3) Fungsi Karakteristik Distribusi Four-Parameter Generalized t

(1) Fungsi Karakteristik Distribusi *Four-Parameter Generalized t* dengan definisi

Pada bagian ini akan dijelaskan fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* . Fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dapat diperoleh dari fungsi pembangkit momen dengan menambahkan i sebagai bagian imajiner .

Jika X adalah distribusi peubah acak distribusi generalized t dengan parameter $\mu \in$R dan σ , p , q > 0 , maka fungsi karakteristik X adalah sebagai berikut :

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Oleh karena batas x pada fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* adalah $-\infty < x < \infty$,dan berdasarkan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* diperoleh grafik plot yang simetri pada μ, maka berdasarkan teorema simetri berlaku:

$$\phi_{x-\mu}(t) = 2\int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)}\ f(x)dx$$

$$= 2\int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)} \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

Misalkan $y = \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}$ kita dapat menulis ulang persamaan (2) dalam bentuk berikut

$$\phi_{x-\mu}(t) = \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{0}^{\infty} e^{it(x-\mu)} \frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma\, dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)} \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy \qquad (3)$$

Menggunakan MacLaurin dari fungsi $e^{it(x-\mu)}$, maka persamaan (3) dapat ditulis sebagai

$$\phi_{x-\mu}(t) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it(x-\mu))^{n}}{n!} \right) \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^{n}}{n!} \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{n}{p}, q-\frac{n}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^{n}}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(q-\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(q)}$$

Dengan pendekatan Stirling, diperoleh

$$\phi_{x-\mu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{n}}{n!} \qquad (4)$$

Dengan menggunakan ekspansi deret MacLaurin, persamaan (4) dapat dinyatakan sebagai

$$\phi_{x-\mu}(t) = e^{itq^{\frac{1}{p}}\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Jadi fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah

$$\phi_{x}(t) = E\left(e^{itx}\right) = e^{it\mu} E\left(e^{it(x-\mu)}\right) = e^{it\mu}.\phi_{x-\mu}(t)$$

$$= e^{it\mu}.e^{it\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

(2) Fungsi karakteristik distribusi four-parameter generalized t dengan ekspansi trigonometri

Selain menggunakan metode yang dijelaskan sebelumnya , pada bagian ini akan dijelaskan cara lain untuk menentukan fungsi dari karakteristik , sebagai berikut :

Akan ditunjukkan bahwa

$$\phi_{x}(t) = E\left(e^{itx}\right) = E\left[Cos(tx) + i\,Sin(tx)\right]$$
$$= E[Cos(tx)] + i\ E[Sin\ (tx)]$$
$$= e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

Bukti :

$$\phi_{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\ f(x)dx$$

Oleh karena batas x pada fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* adalah $-\infty < x < \infty$, dan berdasarkan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* diperoleh grafik plot yang simetri pada μ, maka berdasarkan teorema simetri berlaku:

$$\phi_{x-\mu}(t) = 2\int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)}\ f(x)\ dx$$

$$= 2\int_{\mu}^{\infty} \left[Cos\left(t(x-\mu)\right) + i\,Sin\left(t(x-\mu)\right)\right] f(x)\,dx$$

(5)

Persamaan (5) akan diselesaikan berikut ini

$f(x-\mu) = Cos\left(t(x-\mu)\right)$ dan

$f(x-\mu) = Sin\left(t(x-\mu)\right)$

$f(x-\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-\mu)^n$; dimana $C_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$

Oleh karena,

$$Cos\left(t(x-\mu)\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(t(x-\mu)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(t(x-\mu)\right)^4 \mp \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(t(x-\mu)\right)^{2n}$$

$$i\,Sin\left(t(x-\mu)\right) = it(x-\mu) - \frac{1}{3!} i\left(t(x-\mu)\right)^3 + \frac{1}{5!} i\left(t(x-\mu)\right)^5 \mp \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} i\left(t(x-\mu)\right)^{2n+1}$$

Dengan memisahkan menjadi dua bagian, kita selesaikan secara terpisah dari persamaan (5) yang kita miliki,

Bagian pertama

$$\int_{\mu}^{\infty} Cos\left(t(x-\mu)\right) f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-\mu)^n\right) \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}}\,dx$$

$$= \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty}\left(1 - \frac{\left(t(x-\mu)\right)^2}{2!} + \frac{\left(t(x-\mu)\right)^4}{4!} \mp \cdots\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}}\,dx$$

(6)

Dengan memisalkan $y = \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p$ kita dapat menuliskan persamaan (6) dalam bentuk berikut

$$\int_{\mu}^{\infty} Cos\left(t(x-\mu)\right) f(x)\,dx = \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty}\left(1 - \frac{\left(t(x-\mu)\right)^2}{2!} + \frac{\left(t(x-\mu)\right)^4}{4!} \mp \cdots\right) \frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma\, dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{0}^{\infty}\left(1 - \frac{\left(t(x-\mu)\right)^2}{2!} + \frac{\left(t(x-\mu)\right)^4}{4!} \mp \cdots\right) \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}\left[\int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy - \int_0^{\infty} \frac{\left(t(x-\mu)\right)^2}{2!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy + \int_0^{\infty} \frac{\left(t(x-\mu)\right)^4}{4!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}\left[\int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy - \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2!}\left(y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma\right)^2 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy + \int_0^{\infty} \frac{(t)^4}{4!}\left(y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma\right)^4 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}\left[\int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy - \frac{t^2}{2!} q^{\frac{2}{p}} \sigma^2 \int_0^{\infty} y^{\frac{2}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy + \frac{t^4}{4!} q^{\frac{4}{p}} \sigma^4 \int_0^{\infty} y^{\frac{4}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}\left[\int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\,dy - \frac{t^2}{2!} q^{\frac{2}{p}} \sigma^2 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{2}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{2}{p}+q-\frac{2}{p}}}\,dy + \frac{t^4}{4!} q^{\frac{4}{p}} \sigma^4 \int_0^{\infty} y^{\frac{4}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{4}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{4}{p}+q-\frac{4}{p}}}\,dy + \cdots\right]$$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi Beta, kita memiliki

$$\int_{\mu}^{\infty} Cos\left(t(x-\mu)\right) f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)}\left[B\left(\frac{1}{p}, q\right) - \frac{t^2}{2!} q^{\frac{2}{p}} \sigma^2 B\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}, q - \frac{2}{p}\right) + \frac{t^4}{4!} q^{\frac{4}{p}} \sigma^4 B\left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p}, q - \frac{4}{p}\right) + \cdots\right]$$

$$= 1 - \frac{\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^2}{2!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}, q - \frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^4}{4!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p}, q - \frac{4}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \cdots$$

(7)

Bagian kedua ,

$$\int_{\mu}^{\infty} i\,Sin\left(t(x-\mu)\right) f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-\mu)^n\right) \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}}\,dx$$

$$= \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty}\left(it(x-\mu) - \frac{i\left(t(x-\mu)\right)^3}{3!} + \frac{i\left(t(x-\mu)\right)^5}{5!} \mp \cdots\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}}\,dx$$

(8)

Dengan memisalkan $y = \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p$ kita dapat menuliskan persamaan (8) dalam bentuk berikut

$$2\int_{\mu}^{\infty} i\,Sin\left(t(x-\mu)\right) f(x)\,dx =$$

$$\frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{0}^{\infty}\left(it(x-\mu) - \frac{i\left(t(x-\mu)\right)^3}{3!} + \frac{i\left(t(x-\mu)\right)^5}{5!} \mp \cdots\right) \frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma\, dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^\infty \left(itx - \frac{i(t(x-\mu))3}{3!} + \frac{i(t(x-\mu))^5}{5!} \mp \cdots \right) \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[\int_0^\infty it(x-\mu) \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \int_0^\infty \frac{i(t(x-\mu))^3}{3!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \int_0^\infty \frac{i(t(x-\mu))^5}{5!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[\int_0^\infty it\left(y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma \right) \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \int_0^\infty \frac{it^3}{3!} \left(y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^3 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \int_0^\infty \frac{it^5}{5!} \left(y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^5 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \cdots \right]$$

$$\int_\mu^\infty i\, Sin\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx =$$

$$\frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[itq^{\frac{1}{p}} \sigma \int_0^\infty y^{\frac{1}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \frac{it^3}{3!} q^{\frac{3}{p}} \sigma^3 \int_0^\infty y^{\frac{3}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \frac{it^5}{5!} q^{\frac{5}{p}} \sigma^5 \int_0^\infty y^{\frac{5}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[itq^{\frac{1}{p}} \sigma \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+q-\frac{1}{p}}} dy - \frac{it^3}{3!} q^{\frac{3}{p}} \sigma^3 \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{3}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{3}{p}+q-\frac{3}{p}}} dy + \frac{it^5}{5!} q^{\frac{5}{p}} \sigma^5 \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{5}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{5}{p}+q-\frac{5}{p}}} dy + \cdots \right]$$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi Beta , kita memiliki

$$\int_\mu^\infty i\, Sin\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx =$$

$$\frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[itq^{\frac{1}{p}} \sigma B\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}, q-\frac{1}{p}\right) - \frac{it^3}{3!} q^{\frac{3}{p}} \sigma^3 B\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{p}, q-\frac{3}{p}\right) + \frac{it^5}{5!} q^{\frac{5}{p}} \sigma^5 B\left(\frac{1}{p}+\frac{5}{p}, q-\frac{5}{p}\right) + \cdots \right]$$

$$= itq^{\frac{1}{p}} \sigma \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}, q-\frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{i\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^3}{3!} \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{p}, q-\frac{3}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{i\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^5}{5!} \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{5}{p}, q-\frac{5}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \cdots$$

(9)

Mensubstitusikan Persamaan (7) dan Persamaan (9) ke dalam Persamaan (5), jadi

$$\int_\mu^\infty Cos\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx + \int_\mu^\infty i\, Sin\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx =$$

$$\left[1 - \frac{\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^2}{2!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p}, q-\frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^4}{4!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{p}, q-\frac{4}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \cdots \right]$$

$$+ \left[itq^{\frac{1}{p}} \sigma . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}, q-\frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{i\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^3}{3!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{p}, q-\frac{3}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{i\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^5}{5!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{5}{p}, q-\frac{5}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \cdots \right]$$

$$= 1 + itq^{\frac{1}{p}} \sigma . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}, q-\frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^2}{2!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p}, q-\frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{i\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^3}{3!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{p}, q-\frac{3}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} +$$

$$\frac{\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^4}{4!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{p}, q-\frac{4}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{i\left(tq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^5}{5!} . \frac{B\left(\frac{1}{p}+\frac{5}{p}, q-\frac{5}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \cdots$$

Diketahui bahwa $i = \sqrt{-1}$, i adalah bagian dari imajiner , sehingga persamaan menjadi

$$\int_\mu^\infty Cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_\mu^\infty i\; Sin(t(x-\mu)) f(x) dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \frac{\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(q-\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{n}{p}+q-\frac{n}{p}\right)}}{\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+q\right)}}$$

$$\int_\mu^\infty Cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_\mu^\infty i\; Sin(t(x-\mu)) f(x) dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(q-\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+q\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(q)}$$

$$\int_\mu^\infty Cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_\mu^\infty i\; Sin(t(x-\mu)) f(x) dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(q-\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(q)}$$

Dengan pendekatan Stirling , kita memperoleh

$$\int_\mu^\infty Cos\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx + \int_\mu^\infty i\, Sin\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \frac{\sqrt{2\pi}.e^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{n}{p}-\frac{1}{2}} . \sqrt{2\pi}.e^{-q}\left(q\right)^{q-\frac{n}{p}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}.e^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} . \sqrt{2\pi}.e^{-q}\left(q\right)^{q-\frac{1}{2}}}$$

$$\int_\mu^\infty Cos\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right) dx + \int_\mu^\infty i\, Sin\left(t(x-\mu)\right) f\left(x\right)\, dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{n}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{n}{p}}$$

$$\int_\mu^\infty Cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_\mu^\infty i\; Sin(t(x-\mu)) f(x) dx =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^n}{n!}$$

(10)

dan persamaan (10) dapat ditulis kembali sebagai bentuk berikut

$$\phi_{x-\mu}\left(t\right) = e^{itq^{\frac{1}{p}}\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Jadi fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = e^{it\mu} E\left(e^{it(x-\mu)}\right) = e^{it\mu}.\phi_{x-\mu}(t)$$

$$= e^{it\mu}.e^{it\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

Dengan demikian , fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

Berdasarkan penjabaran tersebut dalam menentukan fungsi karakteristik menggunakan definisi dan menggunakan ekspansi trigonometri diperoleh hasil yang sama. Sehingga dapat disimpulkan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah :

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

(3) Pembuktian Sifat-Sifat Dasar Fungsi Karakteristik dari Fungsi Karakteristik Distribusi *Four-Parameter Generalized t*

Pada bagian ini akan dibahas tentang sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* . Akan ditunjukkan bahwa fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat-sifat dasar dari fungsi karakteristik.

Sifat 1. Misalkan fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized* adalah

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$ Maka $\phi_x(0) = 1$.

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

Masukan t = 0 , maka kita mendapatkan

$$\varphi_x(0) = e^{0\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)} = e^0$$

$$\varphi_x(0) = 1$$

Sifat 2. $|\phi_x(t)| \le 1$

Bukti:

Menurut definisi , diketahui bahwa :

$$e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$$

dan $i = \sqrt{-1}$, sehingga

$$\left|e^{itx}\right|^2 = \cos^2(tx) + \sin^2(tx) = 1$$

$$\left|e^{itx}\right| = \sqrt{1} = 1$$

jadi diperoleh

$$|\phi_x(t)| = \left|2\int_\mu^\infty e^{itx}.dF\right|$$

$$\le 2\int_\mu^\infty \left|e^{itx}\right| dF$$

$$= 2\int_\mu^\infty 1.dF$$

$$= 2\int_\mu^\infty dF$$

$$= 2\int_\mu^\infty f(x)dx$$

$$= 2\int_\mu^\infty . \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

$$= \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_\mu^\infty . \frac{p}{\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

(15)

Misalkan $y = \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p$ kita dapat menulis ulang persamaan (15) dalam bentuk berikut

$$|\phi_x(t)| = \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \cdot \frac{1}{[1+y]^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma \, dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{[1+y]^{\frac{1}{p}+q}} dy$$

Karena $B\left(\frac{1}{p}, q\right) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$, maka

$$|\phi_x(t)| = \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} B\left(\frac{1}{p}, q\right)$$

$$= 1$$

■

Sifat 3.

Misalkan $\phi_x(t) = e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$ adalah fungsi karakteristik dari peubah acak X dari distribusi *four-parameter generalized t*. Maka fungsi karakteristik peubah acak -X adalah $\overline{\phi_x(t)}$

Bukti.

Misalkan $\overline{\phi_x(t)}$ adalah konjugat kompleks dari $\phi_x(t)$, akan ditunjukkan bahwa fungsi karakteristik (-t) adalah $\overline{\phi_x(t)}$, maka :

$$\phi_x(-t) = e^{-it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\phi_x(t)}$$

$$= \overline{\phi_x(t)}$$

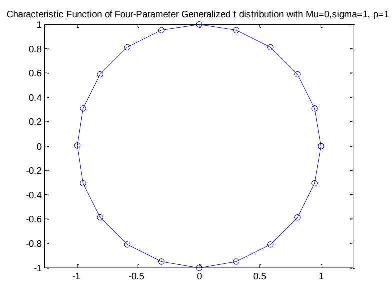
Jadi, fungsi karakteristik (-*t*) dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah $\phi_x(-t) = \frac{1}{e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}}$

Dari pembuktian ketiga sifat fungsi karakteristik tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat-sifat dasar dari fungsi karakteristik. Selanjutnya akan dilakukan simulasi grafik fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t.*

3) Simulasi Grafik Fungsi Karakteristik Distribusi *Four-Parameter Generalized t*

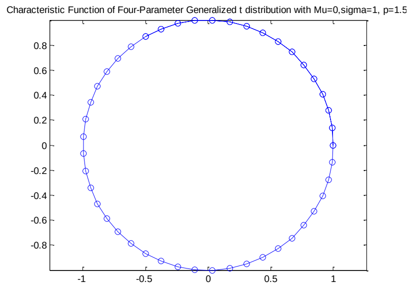
Pada bagian ini akan dibahas mengenai simulasi grafik fungsi karakteristik dari ditribusi *four-parameter generalized t* dengan menggunakan software MATLAB **R**2010**b**.

1. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=1.



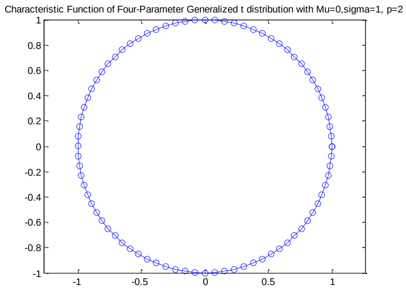
Gambar 14. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=1.

2. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=1,5.



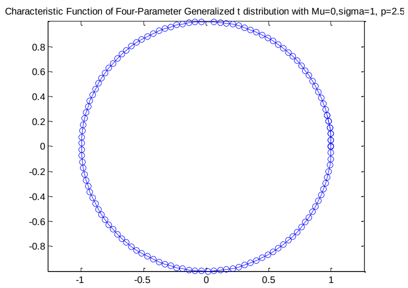
Gambar 15. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0, σ=1 dan *p*=1,5

3. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan p=2



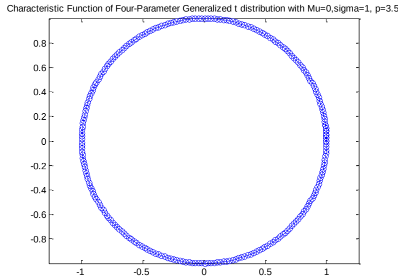
Gambar 16. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=2

4. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan p=2,5.



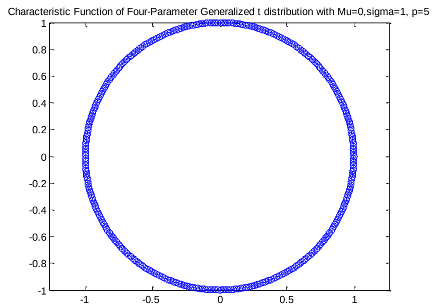
Gambar 17. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=2,5.

5. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan p=3,5.



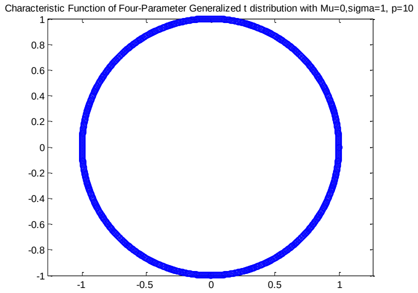
Gambar 18. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=3,5

6. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan p=5.



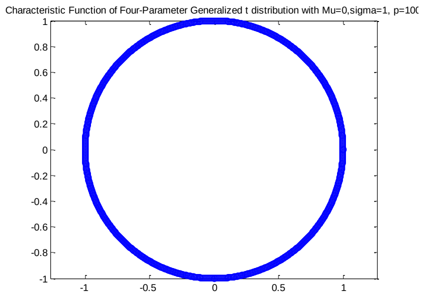
Gambar 19. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=5

7. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan p=10.



Gambar 20. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=10

8. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=100.



Gambar 21. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan μ=0,σ=1 dan *p*=100.

Berdasarkan hasil simulasi grafik fungsi karakteristik dari *distribusi four-parameter generalized t* dengan menggunakan software MATLAB R2010b dapat disimpulkan bahwa semakin meningkat nilai parameter bentuk yaitu *p*, maka grafik fungsi karakteristik *distribusi four-parameter generalized t* akan membentuk kurva tertutup (lingkaran) yang mulus.

3. KESIMPULAN

Kita dapat menyimpulkan beberapa poin dari paparan diatas sebagai berikut :

1. Fungsi karakteristik dari distribusi four-parameter generalized t adalah
$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu+\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$
2. Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat-sifat dasar fungsi karakteristik.
3. Hasil simulasi grafik menunjukan bahwa semakin meningkat nilai parameter *p* yaitu parameter bentuk, maka grafik fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* membentuk kurva tertutup (lingkaran) yang mulus.

4. DAFTAR PUSTAKA

Boyer, Brian H., James B. McDonald, Whitney K. Newey. (2003). A Comparison of Partially Adaptive and Reweighted Least Squares Estimation. *Econometric Reviews Vol.22. No.2 pp*: 115-134.

Chan, J.S.K, Choy, S.T.B, and Markov U.E: 2007. Robust Bayesian Analysis of Loss Reserves Data Using the Generalized-t Distribution. *Quantitative Finance Research Centre. University of Technology Sydney*. www.qfrc.uts.edu.au

Lee, Anthony, Francois Caron, Arnaud Doucet, and Chris Holmes. (2012). Bayesian Sparsity-Path-

Analysis of Genetic Association Signal using Generalized t Priors. *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*. Computational Statistical Methods For Genomics And Systems Biology.

McDonald ,James B and Whitney K. Newey. (1988). Partially Adaptive Estimation of Regression Models Via The Generalized t Distribution. *Econmet Theory 4*: 428-457.