

ANALISIS KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS PADA MATAKULIAH TEORI BILANGAN

Arfatin Nurrahmah¹, Abdul Karim²

¹Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Indraprasta PGRI Jakarta
email: arfatinnurrahmah@gmail.com

²Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Indraprasta PGRI Jakarta
email: Abdul.depok@gmail.com

Abstract

The number theory course focuses on the activities of reasoning, reviewing, analyzing, and proving, which is a high level of cognitive ability. Especially for of a lot of proof errors are done by students. The purpose of this research is to analyze the students' of ability in the number theory course. The research method used is qualitative deductive research with research subjects amounted to 30 students semester three academic year 2017/2018. Data collection techniques use data triangulations. The results of mathematical proofing ability found that most of the students still have difficulty in solving the problem of proof. As many as 60% of the research sample has not understood how to solve the problem of proof. Based on these data, it can be concluded that the student has not be able to optimize all capabilities, especially the proof of mathematics in working on the number theory that tends to give up in working on problems when experiencing difficulties.

Keywords: the ability, proof of mathematics, number theory

Abstract

Teori bilangan berfokus pada kegiatan penalaran, peninjauan, analisis, dan pembuktian, yang merupakan kemampuan kognitif tingkat tinggi. Terutama untuk banyak bukti kesalahan yang dilakukan oleh siswa. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis kemampuan siswa dalam teori bilangan. Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian deduktif kualitatif dengan subjek penelitian berjumlah 30 siswa semester tiga tahun akademik 2017/2018. Teknik pengumpulan data menggunakan triangulasi data. Hasil kemampuan pemeriksaan matematis menemukan bahwa sebagian besar siswa masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan masalah pembuktian. Sebanyak 60% dari sampel penelitian belum memahami bagaimana menyelesaikan masalah pembuktian. Berdasarkan data tersebut, dapat disimpulkan bahwa siswa belum dapat mengoptimalkan semua kemampuan, terutama pembuktian matematika dalam mengerjakan teori bilangan yang cenderung menyerah dalam mengerjakan soal ketika mengalami kesulitan.

Kata kunci: kemampuan, bukti matematika, teori bilangan

1. PENDAHULUAN

Pembelajaran matematika untuk level perguruan tinggi sulit untuk dipelajari karena materi yang disajikan lebih bersifat

abstrak. Dalam mempelajari matematika, mahasiswa membutuhkan kemampuan-kemampuan matematis, diantaranya adalah pembuktian. Pembuktian

Open Access



Ciptaan disebarluaskan di bawah [Lisensi Creative Commons Atribusi-BerbagiSerupa 4.0 Internasional](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

Diterbitkan Oleh: <http://ejournal.stkipmpringsewu-lpg.ac.id/index.php/edumath>

mempunyai tingkat kedalaman arti yang berbeda-beda. Bukti adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Solow (1990) menyatakan bahwa matematika adalah bahasa para matematikawan, sementara pembuktian adalah suatu metode penyampaian kebenaran matematik kepada orang lain yang juga “berbicara” dengan bahasa yang sama.

Selain itu, pembelajaran matematika yang dilakukan selama ini umumnya bersifat prosedural, artinya hanya mengikuti atau mengerjakan soal sesuai dengan rumus yang tertulis di buku acuan atau berdasarkan rumus yang diberikan oleh dosen tanpa memahami betul dari mana asalnya rumus tersebut. Dengan kata lain pemahaman konseptualnya diabaikan. Padahal dalam menyelesaikan soal kita perlu pemahaman prosedural dan konseptual secara terpadu.

Belajar konsep berguna dalam rangka mendidik mahasiswa atau paling tidak mempunyai pengaruh tertentu, yaitu: 1) Konsep mengurangi kerumitan lingkungan, 2) konsep-konsep membantu kita untuk mengidentifikasi objek-objek yang ada di sekitar kita, 3) konsep membantu kita untuk mempelajari sesuatu yang baru, lebih luas dan lebih maju, 4) konsep mengarahkan kegiatan

instrumental, 5) konsep memungkinkan pelaksanaan pengajaran 6) Konsep dapat digunakan untuk mempelajari dua hal yang berbeda dalam kelas yang sama (Hamalik, 2010).

Di dalam matematika, sebuah konsep kadang perlu dibuktikan kebenarannya. Memang tidak semua konsep matematika yang dipelajari harus dipahami buktinya. Faktor kepadatan materi dan keterbatasan waktu masih merupakan kendala klasik yang dihadapi oleh dosen maupun pengajar matematika. Namun beberapa konsep sederhana pun sering diabaikan pembuktiannya. Suatu ilustrasi ketika kita mengajar tentang himpunan bilangan real kita pasti menyampaikan bahwa himpunan bilangan real yang disimbolkan dengan R terpecah menjadi dua himpunan bagian yang saling asing, yaitu himpunan bilangan rasional Q dan himpunan bilangan irrasional R/Q .

Pembuktian Matematika adalah sebuah demonstrasi yang meyakinkan atas rumus, teorema itu benar, dengan bantuan logika dan matematika. Pembuatan bukti telah lama mendapatkan perhatian besar dalam matematika teoretis. Menurut Hernandi (2008) pembuktian terbagi menjadi dua yaitu pembuktian langsung dan tidak langsung. Pembuktian langsung lebih menggunakan silogisme,

modus ponens dan modus tollens. Dimana logika pembuktian q benar secara langsung atau ekuivalen dengan pembuktian bahwa pernyataan q benar dimana diketahui p benar. Pembuktian tidak langsung menggunakan kontraposisi untuk membuktikan kebenaran implikasi.

Melalui tugas pembuktian, dosen dapat melihat: (1) bagaimana kemampuan mahasiswa dalam berargumentasi secara logis, (2) bagaimana mahasiswa menggunakan contoh dan lawan contoh untuk mendukung argumentasinya, (3) kelemahan-kelemahan apa saja yang dialami mahasiswa dalam bernalar, dan (4) miskonsepsi apa yang sering dialami mahasiswa.

Berdasarkan uraian mengenai sejumlah para ahli mengenai pembuktian matematis di atas, dapat dirangkum bahwa kemampuan pembuktian matematis merupakan kemampuan yang dimiliki seseorang dalam berargumentasi secara logis dan dapat menggunakan nalar dalam mempertahankan argumennya sehingga didapatkan hasil yang valid.

Indikator kemampuan pembuktian matematis menurut Lestari (2015) antara lain: (1) Membaca pembuktian matematis. (2) Melakukan pembuktian matematis, secara langsung, tak langsung atau dengan

induksi matematis (3) Menkritik pembuktian dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis. Dalam penelitian ini, indikator kemampuan pembuktian matematis yang akan diukur adalah memahami pernyataan atau simbol matematika serta dapat menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema.

Teori Bilangan merupakan mata kuliah wajib ditempuh oleh mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Indraprasta PGRI Jakarta. Teori Bilangan merupakan materi perkuliahan yang terstruktur secara hierarkis, maksudnya bahwa matakuliah teori bilangan merupakan dasar bagi mata kuliah selanjutnya. Mata kuliah ini dibahas mengenai beberapa konsep dasar dan penting dalam teori bilangan. Mata kuliah ini juga memberikan wahana kepada mahasiswa untuk berlatih berpikir kreatif dalam menyelesaikan suatu permasalahan dalam teori bilangan dengan mengacu sasaran di atas. Mata kuliah ini diberikan dengan menekankan pada pemberian waktu yang relatif banyak kepada mahasiswa untuk melakukan problem solving mulai dari permasalahan sederhana hingga yang cukup rumit.

Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat dan keterkaitan antara sejumlah bilangan serta mengandung sebuah permasalahan terbuka yang dapat dimengerti walaupun bukan ahli matematika. Didalam perkuliahan teori bilangan terdapat beberapa bagian yang dapat dipelajari yang berhubungan dengan bilangan bulat yaitu aritmatika jam, aritmatika modulo, bilangan prima, uji keprimaan, kongruensi. Setelah mengikuti perkuliahan teori bilangan diharapkan mahasiswa dapat meningkatkan kemampuan bereksplorasi, berargumentasi, melakukan koneksi, berkomunikasi dan kemampuan *problem solving* melalui pemahaman konsep teori bilangan.

Berdasarkan hasil pengamatan, khususnya selama mengajarkan mata kuliah Teori bilangan, umumnya mahasiswa mengalami kesulitan karena: 1) kurangnya pemahaman mahasiswa terhadap konsep yang akan dibuktikan, mereka masih mengalami kesulitan dalam mengidentifikasi apa yang diketahui, apa yang akan dibuktikan; (2) kurangnya pemahaman tentang metode-metode pembuktian yang akan digunakan; (3) kurangnya kemampuan dalam menggunakan maupun memanipulasi

fakta-fakta yang diketahui dan mengkaitkannya dengan yang akan ditunjukkan serta; (4) kurangnya kemampuan dalam menyusun alur/sistematika bukti tersebut.

Melihat rendahnya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa, maka perlu dianalisis terkait kemampuan pembuktian matematisnya. Karena itu perlu diperoleh data akurat penyebab kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika. Hal ini penting untuk merancang perkuliahan dengan menggunakan pembuktian matematika secara efektif. Dalam penelitian ini peneliti mengambil materi pokok bahasan bilangan bulat, dikarenakan didalam bilangan bulat terdapat sifat, dan teorema yang berlaku dan tidak berlaku di bilangan asli dan bilangan cacah. Dari permasalahan di atas peneliti akan melakukan penelitian dengan judul: analisis kemampuan pembuktian matematis pada mata kuliah teori bilangan.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan di Universitas Indraprasta PGRI Jakarta pada matakuliah teori bilangan yang diajarkan di semester 3 tahun akademik 2017/2018. Penelitian ini dilaksanakan

selama empat bulan terhitung dari bulan Oktober 2017 sampai dengan Januari 2018. Subjek penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah 30 mahasiswa.

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian adalah metode penelitian deduktif kualitatif. Menurut Nazil (dalam Karim, 2017) penelitian deduktif yaitu suatu metode dalam meneliti status kelompok manusia, suatu objek, suatu kondisi, suatu sistem pemikiran ataupun suatu kelas peristiwa pada masa sekarang yang bertujuan untuk membuat deskripsi, gambaran atau lukisan secara sistematis, faktual dan akurat mengenai fakta-fakta, sifat-sifat serta hubungan antar fenomena yang diselidiki. Dalam penelitian ini ingin diungkapkan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa dalam matakuliah teori bilangan. Penelitian kualitatif merupakan penelitian yang digunakan untuk menyelidiki, menemukan, menggambarkan, dan menjelaskan kualitas atau keistimewaan dari pengaruh social yang tidak dapat dijelaskan, diukur, atau digambarkan melalui pendekatan kuantitatif (Saryono, dalam Syarifah:2017). Penelitian kualitatif digunakan untuk mendapatkan analisis data yang mendalam dan bermakna. Mendeskripsikan fenomena dilakukan dengan maksud adalah peneliti ingin

mengungkapkan kemampuan pemahaman dan pembuktian matematis mahasiswa dalam mata kuliah teori bilangan.

Teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan triangulasi data yaitu, (1) Studi pustaka dalam penelitian ini peneliti mengumpulkan informasi diantaranya dari berbagai sumber seperti:, Indikator kemampuan pembuktian matematis., buku referensi, data dari internet, artikel Ilmiah. (2) Dokumentasi, Berikut adalah daftar dokumentasi yang digunakan oleh peneliti: soal dan Jawaban teori bilangan mahasiswa pada Ujian Tengah Semester tahun akademik 2017/2018, penelitian yang relevan seperti skripsi, jurnal, tesis dan disertasi. (3) Wawancara, dalam penelitian ini yang menjadi narasumber adalah para ahli. Topik yang akan ditanyakan adalah mengenai teknik menentukan indikator dalam penelitian.

Teknik analisis data pembuktian matematis yaitu dengan cara menyesuaikan soal dengan indikator. Soal dan jawaban ujian tengah semester mahasiswa pada matakuliah teori bilangan diperiksa apakah pengerjaan mahasiswa sudah benar dan juga sesuai dengan indikator yang ada. Berikut ini adalah Tabel 1. Indikator Pembuktian Matematis, yaitu:

Tabel 1. Kisi-kisi Kemampuan Pembuktian Matematis

Indikator	Butir Soal
memahami pernyataan atau symbol matematika serta menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, perinsip dan teorema.	Buktikan: Jika $a \mid (b^2 - 2b)$ dan $a \mid (b^2 - 2b + c)$, maka $a \mid c$

Sumber: Lestari (2015) dengan Modifikasi

Setelah dikategorisasikan peneliti menghitung persentase pada masing-masing analisis diatas. Dengan demikian dapat ditulis persentase menurut Sudjana dan Ibrahim (Karim, 2018) di setiap tingkatan melalui rumus sebagai berikut:

$$P = \frac{F}{N} \times 100\%$$

Keterangan :

P = Nilai persen

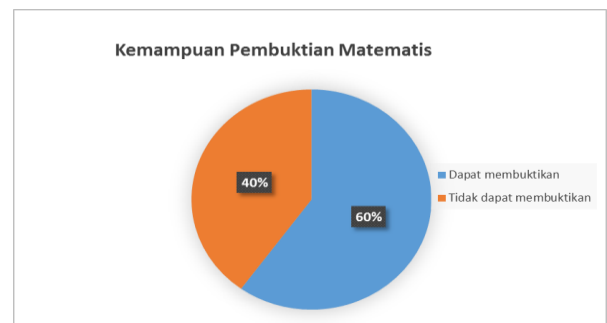
F = Jumlah skor yang diperoleh

N = Jumlah skor maksimal

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

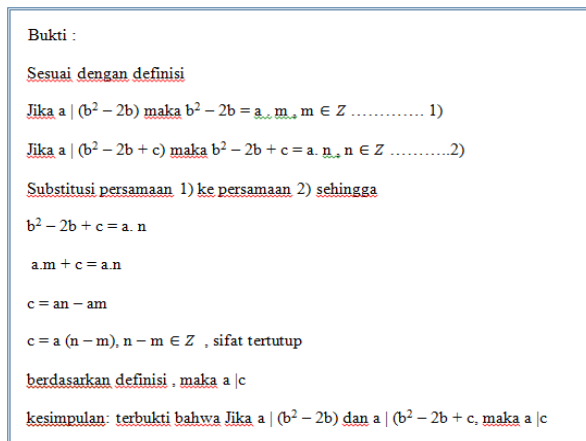
Analisis kemampuan pembuktian matematis pada mata kuliah teori bilangan disajikan pada Gambar 1. persentase tingkat kemampuan pembuktian matematis mahasiswa.

Diagram 1. Persentase Kemampuan Pembuktian Matematis.



Pada Gambar. 1 tersebut, sebanyak 60% dari sampel penelitian belum mengerti cara menyelesaikan soal pembuktian. Berdasarkan data tersebut maka dapat disimpulkan bahwa mahasiswa belum dapat mengoptimalkan seluruh kemampuan terutama kemampuan pembuktian matematisnya dalam mengerjakan soal teori bilangan sehingga cenderung menyerah dalam mengerjakan soal ketika mengalamikesulitan. Sebanyak 40% sampel sudah mengerti cara menyelesaikan namun masih beberapa yang kurang tepat dalam langkah penyelesaiannya. Berikut diberikan soal dan cara penyelesaian serta beberapa hasil jawaban tes dari mahasiswa yang terkait dengan kemampuan pembuktian matematis pada mata kuliah teori bilangan. Soal dan jawaban dari tes yang diberikan adalah:

Buktikan: Jika $a \mid (b^2 - 2b)$ dan $a \mid (b^2 - 2b + c)$, maka $a \mid c$!

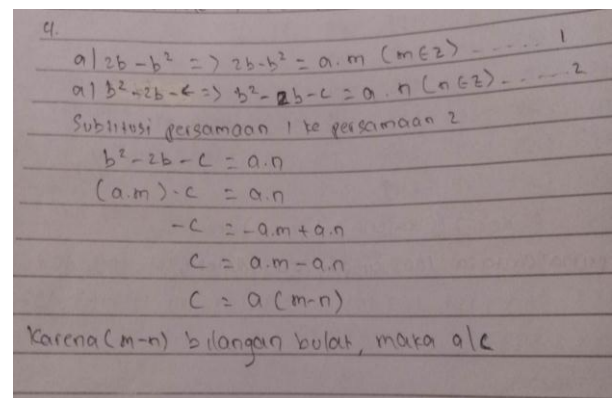


Adapun indikator kemampuan pembuktian matematis yang akan diukur sesuai dengan pendapat tersebut adalah : memahami pernyataan atau simbol matematika serta dapat menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema.

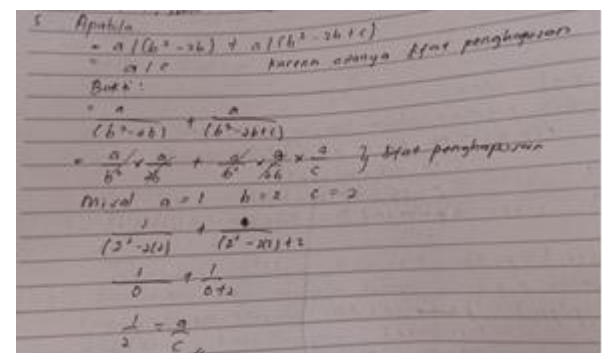
Berdasarkan indikator tersebut, didapatkan hasil penelitian sebagai berikut: Hasil menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian matematis dapat pada indikator memahami pernyataan atau simbol matematika serta dapat menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema, didapatkan bahwa hanya sebesar 26,67% sampel yang mengaitkan definisi dan teorema untuk menyelesaikan soal yang diberikan. Selebihnya masih belum bisa melakukan pembuktian dengan baik,

yaitu dengan menggunakan definisi yang ada, bahkan masih ada dari beberapa mahasiswa yang menggunakan angka dalam melakukan pembuktian. Seperti pada Gambar.1 berikut:

Gambar 1. Jawaban Mahasiswa 1



Gambar 2. Jawaban Mahasiswa 2



Pada gambar 2 jawaban tes mahasiswa sudah sesuai dengan indikator. Jawaban dari mahasiswa menunjukkan bahwa mahasiswa tersebut sudah memahami pernyataan atau simbol matematika serta dapat menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema.

Namun, jika dilihat kembali dari persentase kemampuan pembuktian matematis pada diagram 1, masih didapatkan hasil yang belum optimal. Terlihat bahwa sebagian besar mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal pembuktian. Hal ini disebabkan oleh beberapa faktor, salah satunya adalah lemahnya konsep mengenai bilangan bulat beserta definisi dan sifat-sifatnya (materi prasyarat). Banyaknya sifat-sifat pada teori bilangan kadang membuat mahasiswa bingung, sifat atau teorema mana yang harus digunakan sesuai dengan soal yang ditanyakan. Hal ini dikarenakan keterbatasan pemahaman mahasiswa terhadap materi tersebut. Berdasarkan uraian di atas terlihat bahwa kemampuan pembuktian matematis mahasiswa pada Mata Kuliah Teori Bilangan secara umum masih kurang baik.

4. KESIMPULAN

Sebagian besar mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal pembuktian. Sebanyak 60% dari sampel penelitian belum mengerti cara menyelesaikan soal pembuktian. Berdasarkan data tersebut maka dapat disimpulkan bahwa mahasiswa belum dapat mengoptimalkan

seluruh kemampuan terutama kemampuan pembuktian matematisnya dalam mengerjakan soal teori bilangan sehingga cenderung menyerah dalam mengerjakan soal ketika mengalami kesulitan. Sebanyak 40% sampel sudah mengerti cara menyelesaikan namun masih beberapa yang kurang tepat dalam langkah penyelesaiannya. Hal ini disebabkan oleh beberapa faktor, salah satunya adalah lemahnya konsep mengenai bilangan bulat beserta definisi dan sifat-sifatnya (materi prasyarat).

5. DAFTAR PUSTAKA

- Hamalik, Oemar. 2010. *Proses Belajar Mengajar*. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- Solow, Daniel (1990). *How to Read dan Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. Kanada: John Wiley & Sons, Inc.
- Hernadi, Julan. 2008. *Metoda Pembuktian Dalam Matematika*. Jurnal pendidikan Matematika. Volume 2 No. 1 Januari.
- Lestari, Kurunia Eka. 2015. *Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif Pada Mata Kuliah Analisis Real*. Jurnal Mendidik No.2 Volume 1 Oktober.
- Karim, Abdul. (2017). *Analisis Pendekatan Pembelajaran CTL (Contextual Teaching And Learning) Di SMPN 2 Teluk Jambe Timur*,

Karawang. Jurnal Formatif 7(2):
144-152.

Karim, Abdul. (2018). *Analisis Kualitas Soal Perlombaan Matematika Tingkat SMA*. Titian Ilmu: Jurnal Ilmiah Multi Sciences. Vol 10 (1) : 1-8. Januari 2018.