ISSN 1412-7995

Majalah

KREASI

STKIP MUHAMMADIYAH PRINGSEWU LAMPUNG

Volume 1 Nomor 2 Oktober 2006



PROGRAM STUDI :
- Bimbingan Konseling (BK) S1
- Pendidikan Matematika S1
- Pendidikan Bahasa dan Sastra Indonesia S1

Alamat Redaksi
Pusat Penelitian dan Pengabdian pada Masyarakat
STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung
Jln. Makam KH. Ghalib No. 112 Telp.0729 - 21359 Fax.0729-24002 Pringsewu

KONSTRUKSI UKURAN LEBESGUE PADA R^n
(Lebesgue Measure Construction on R^n)

Oleh: Naning Sutriningsih

ABSTRAK

Teori pengukuran merupakan suatu usaha untuk memberikan model atau bentuk matematika yang tepat dari ide intuitif tentang ukuran dari suatu himpunan, yang digunakan sebelum adanya teori pengintegralan. Ukuran (panjang, luas, volum,) dari suatu himpunan terukur A R^n adalah bilangan real non negatif atau dan disimbolkan dengan (A). Bilangan (A) ini yang disebut sebagai ukuran Lebesgue dari A (the Lebesgue measures of A). Pada prinsipnya ukuran Lebesgue adalah suatu ukuran (panjang, luas, volum) suatu daerah atau bangun yang diperoleh dengan mendasarkan pada lima pendekatan yaitu melalui himpunan kosong, segiempat khusus, poligon khusus, himpunan buka dan himpunan kompak dengan himpunan-himpunan buka yang memuat himpunan kompak tersebut.

A. PENDAHULUAN

Sebelum mempelajari teori-teori pengintegralan diperlukan pemahaman tentang teori pengukuran. Teori pengukuran merupakan suatu usaha untuk memberikan model atau bentuk matematika yang tepat dari ide intuitif tentang ukuran dari suatu himpunan. Sebagai contoh, ukuran dari suatu himpunan tidak kurang dari ukuran himpunan bagiannya.

Ukuran dari suatu gabungan himpunan yang saling asing sama dengan jumlah dari ukuran masing-masing himpunan bagiannya. Dalam hal ini akan dikenalkan suatu metode untuk mendapatkan ukuran himpunan A, dengan $A \subset R^n$

Pada kenyataannya kita tidak mungkin menentukan ukuran setiap himpunan bagian dari R^n, tetapi untuk suatu kelas himpunan yang besar (a large class of sets) dapat menjadi terukur

(measurable). Ukuran (panjang, luas, volum,) dari suatu himpunan terukur $A \subset R^n$ adalah bilangan real non negatif atau ∞ dan disimbolkan dengan $\lambda(A)$. Bilangan $\lambda(A)$ ini yang disebut sebagai ukuran Lebesgue dari A (the Lebesgue measures of A).

Dalam konteks himpunan bagian dari R^n dengan n tertentu, $\lambda(A)$ tidak secara eksplisit menunjukkan nilai n, sehingga dalam situasi tertentu kadang-kadang digunakan notasi $\lambda_n(A)$. Dalam kasus n = 1, ukuran $\lambda(A)$ menunjukkan panjang dari interval $A \subset R$. Jika n=2 maka $\lambda(A)$ adalah luas daerah dari $A \subset R^2$. Sedangkan jika n=3 maka $\lambda(A)$ adalah volum dari $A \subset R^3$. Hal ini akan semakin jelas setelah diberikan definisi yang sebenarnya dari $\lambda(A)$.

Untuk mendefinisikan ukuran Lebesgue himpunan A ($\lambda(A)$) akan diberikan lima definisi. Sebelum membahas definisi tersebut diperlukan beberapa bahan prasyarat sebagai berikut:

❶ Open ball

$x \in R^n$ dan $0<r<\infty$, didefinisikan open ball (bola buka) dengan pusat x dan jari-jari r sebagai himpunan $B(x,r) = \{y \in R^n \mid d(x,y) < r\}$

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

❷ Interior point

Misalkan $x \in A \subset R^n$. Titik x adalah titik interior dari A jhj $\exists r > 0 \ni B(x,r) \subset A$

❸ Open Sets

Misalkan $A \subset R^n$ A himpunan buka jhj setiap titik dari A adalah titik interior.

Simbolik:

$A \subset R^n$ A buka $\Leftrightarrow \forall x \in A$ $\exists r > 0 \ni B(x,r) \subset A$

❹ Interior

Misalkan $A \subset R^n$.interior dari himpunan A adalah himpunan semua titik interior A, disimbolkan A° atau dapat ditulis $A^\circ = \{x \mid x$ titik interior dari A$\}$.

❺ Himpunan Kompak

Sebuah himpunan K dikatakan Kompak jika termuat dalam gabungan berhingga koleksi himpunan-himpunan buka $\zeta = \{G_\alpha\}$

❻ Teorema Heine Borel

Karena biasanya tidak mudah menunjukkan himpunan kompak dengan definisi maka dapat digunakan teorema tentang karakteristik himpunan kompak yang

disebut Teorema Heine Borel, seperti berikut:

Sebuah subset A dari R^n adalah kompak jhj A tutup dan terbatas

❼ Lemma:

K kompak, G_i himpunan buka, dan

$K \subset \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ni [\forall x \in K, \exists i \in I \ni B(x,\varepsilon) \subset G_i]$

❽ Corollary:

Misalkan K himpunan kompak dan F himpunan tutup dengan $K \cap F = \emptyset$, maka

$\exists \varepsilon > 0 \ni \forall x \in K, y \in F, d(x,y) \geq 0.$

B. PEMBAHASAN

Sebagaimana telah dikemukakan pada bagian pendahuluan bahwa dalam makalah ini, akan diberikan 5 definisi untuk mendefinisikan ukuran Lebesgue dari himpunan A $\subset R^n$ sebagai berikut:

Definisi 1 : Himpunan kosong *(The Empty set)*

Ukuran Lebesgue dari himpunan kosong adalah 0 atau $\lambda(\emptyset) = 0$

Definisi 3 : Segi empat khusus *(Special rectangles)*

Dalam sistem bilangan real, notasi [a,b] digunakan untuk interval tertutup $a \leq x \leq b$.

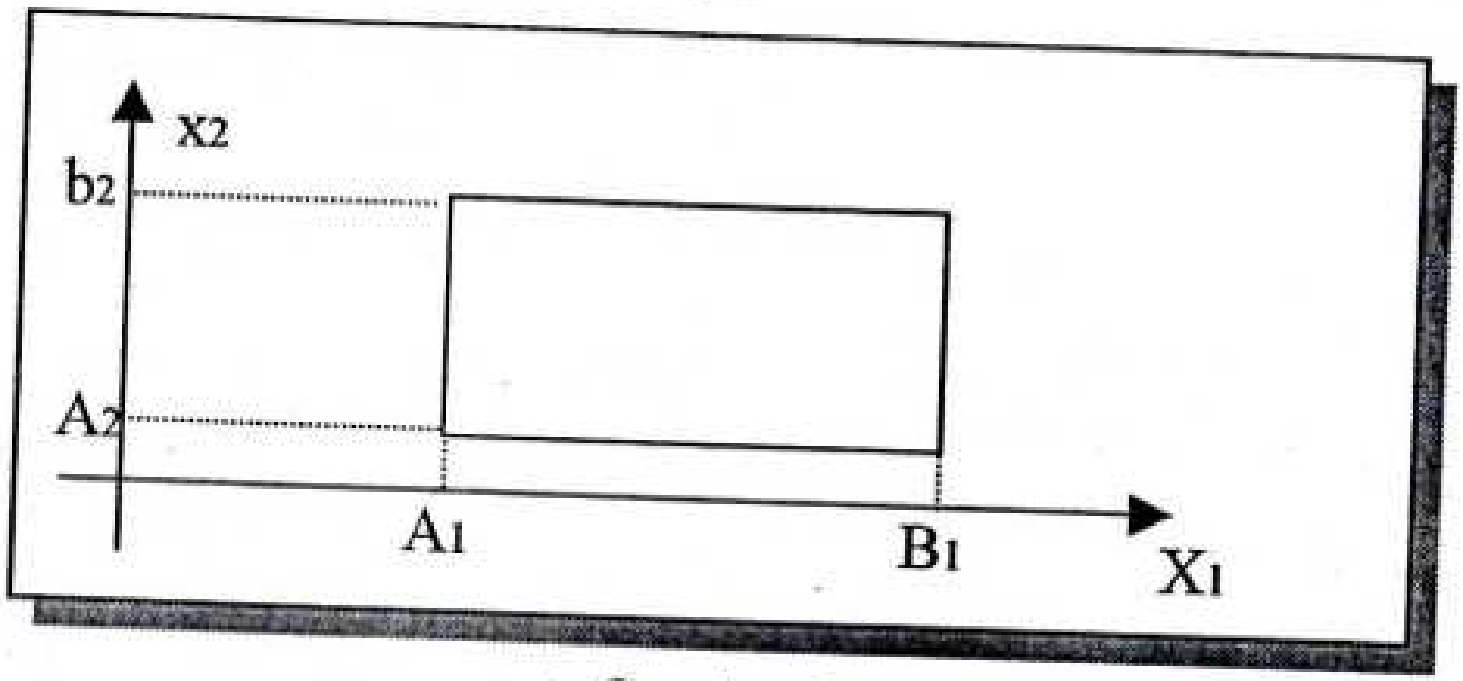
Dalam R^n, suatu segi empat khusus adalah himpunan yang berbentuk

$I = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

$= \{ x \in R^n \mid (x = x_1,\ldots,x_n), a_i \leq x_i \leq b_i$ untuk $1 \leq i \leq n\}$

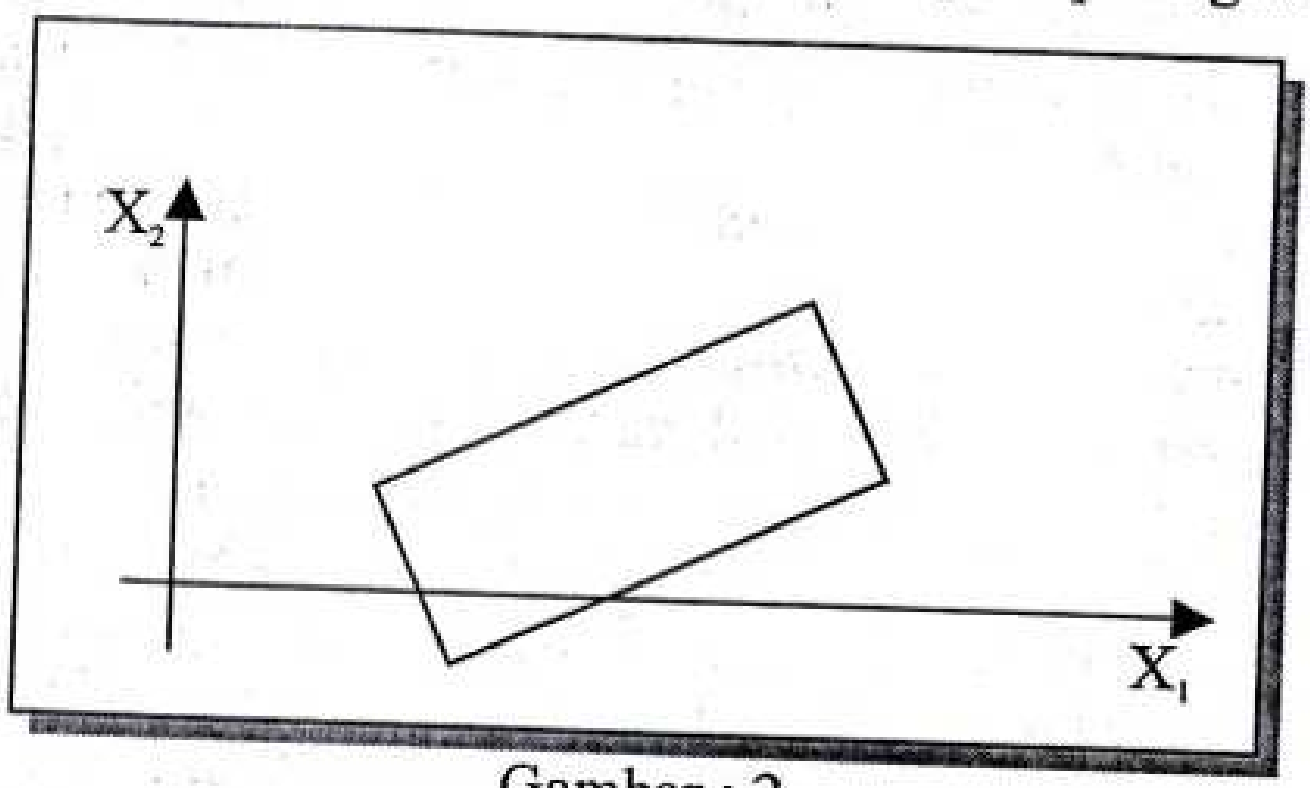
Definisikan $\lambda(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$.

Untuk n = 2 dapat dilihat gambar berikut :



Gambar 1

Pada tingkatan ini, $\lambda(I)$ tidak diberikan untuk I yang bukan suatu segiempat khusus atau segiempat yang tidak istimewa, seperti pada gambar berikut.



Gambar : 2

Berikut ini diberikan beberapa contoh.

Contoh 1:

Misalkan $A \subset R^1$ dengan $A = [-3,5]$. Berdasarkan definisi 2, ukuran Lebesgue dari A atau $\lambda(A)$ dapat dihitung yaitu $\lambda(A) = 5 - (-3) = 8$. Secara umum dikenal bahwa anjang dari interval A sama dengan 8.

Contoh 2:

Misalkan $B \subset R^3$ dengan

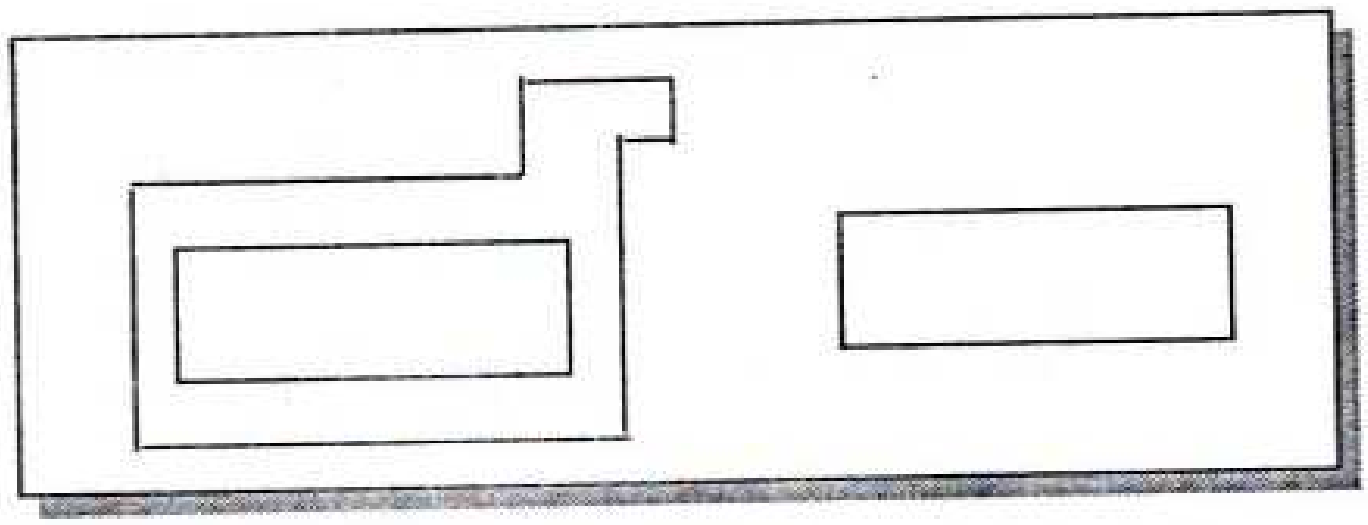
$B=\{(x_1,x_2,x_3)|$

$\leq x_1 \leq 5,\ -3 \leq x_2 \leq 0,\ 3\frac{1}{2} \leq x_3 \leq 4\frac{1}{2}\}$

Ukuran Lebesgue dari B adalah $\lambda(B) = (5)(3)(1) = 15$ atau biasa disebut, volum dari B sama dengan 15.

Definisi 3: Poligon khusus *(Special polygon)*

Suatu poligon khusus adalah gabungan berhingga dari segiempat khusus dengan ukuran dari masing-masing segiempat khusus tersebut tidak sama nol. Salah satu contoh dari poligon khusus di R^2 adalah seperti pada gambar berikut.



Gambar 3

Perhatikan bahwa semua gambar poligon khusus mempunyai sisi-sisi yang sejajar dengan sumbu koordinatnya. Karena poligon khusus yang dipilih tertutup dan terbatas maka berdasarkan Teorema Heine Borel, poligon tersebut adalah kompak. Selanjutnya akan didefinisikan ukuran dari poligon khusus.

Jika P adalah poligon khusus, P merupakan gabungan berhingga dari segiempat khusus yang tidak tumpang tindih (non-overlapping), ditulis:

$P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, maka didefinisikan

$$\lambda(P) = \sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k)$$

Segiempat-segiempat yang tidak tumpang tindih (nonoverlapping) mengakibatkan himpunan titik

interiornya juga saling asing (disjoint).

Definisi ini dilatar belakangi oleh dua asumsi, yaitu:

(i) Nilai λ diperoleh dengan menjumlahkan λ dari setiap segiempat khusus yang saling asing (disjoint).

(ii) Batas-batas dari segiempat I_k tidak memberi pengaruh dalam mengukur P.

Terdapat dua kesulitan dalam definisi 2 ini, yaitu:

(1) Kita harus bisa memastikan bahwa setiap poligon khusus merupakan gabungan berhingga dari segiempat-segiempat yang saling asing (nonover lap- ping rectangles).

(2) Kita harus membuktikan bahwa $\lambda(P)$ menghasilkan sebuah bi-langan yang bebas dari bentuk khusus P yang merupakan ga-bungan berhingga dari segi-empat-segiempat khusus yang tidak saling tumpang tindih.

Terhadap dua kesulitan di atas, tidak akan dibicarakan lebih jauh, yang penting secara intuitif $\lambda(P)$ terdefinisi dengan baik (well defined).

Beberapa hal penting yang harus disimak adalah sebagai berikut:

- Kita memahami bagaimana $\lambda(P)$ didefinisikan dan mengapa didefinisikan dengan cara terse-but.
- Kita dapat mengerti definisi secara intuitif.
- Kita menyadari bahwa ada masalah kecil dalam membuktikan bahwa definisi tersebut masuk akal (make senses).

Pada setiap konstruksi ini, akan diberikan dua sifat yang secara intuitif jelas bagi setiap pembaca. Kedua sifat tersebut adalah sebagai berikut.

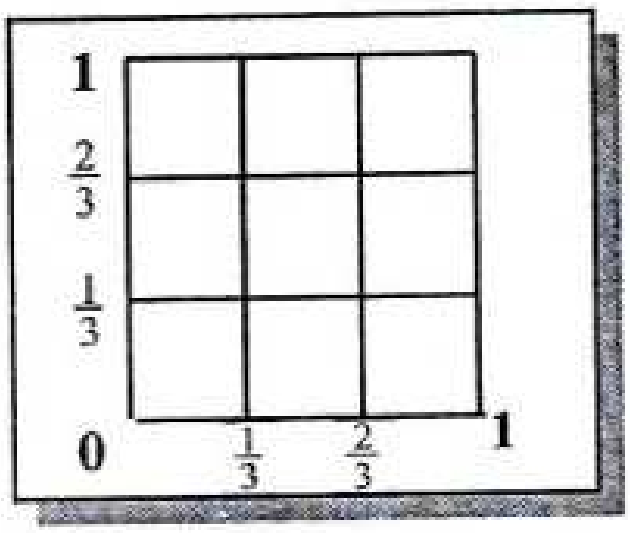
Sifat (K.1) $P_1 \subset P_2 \Rightarrow \lambda(P_1) \leq \lambda(P_2)$

Sifat (K.2) $P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \lambda(P_1 \cup P_2) = \lambda(P_1) + \lambda(P_2)$

Agar lebih jelasnya, berikut ini diberikan sebuah ilustrasi.

Contoh 3: Dalam bidang R^2, misalkan $I = [0,1] \times [0,1]$

Partisi I ke dalam 9 empat persegi yang saling asing dengan panjang sisi $\frac{1}{3}$ satuan, seperti diperlihatkan pada Gambar berikut ini.



Gambar 4

Misalkan G_1 adalah persegi buka yang berada di tengah-tengah dari 9 persegi yang ada.

$G_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})x(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

$I \supseteq G_1$ adalah poligon khusus yang menunjukkan 8 persegi tutup yang non overlapping. Jadi $\lambda(I \supseteq G_1) = 8/9$

Selanjutnya perhatikan kedelapan persegi yang tertutup. Partisi kedelapan persegi masing-masing ke dalam 9 persegi seperti cara sebelumnya dan misalkan G_2 adalah gabungan dari 8 persegi buka yang berada ditengah-tengah.

$I \supseteq G_1 \supseteq G_2$ adalah poligon khusus yang menyatakan 64 persegi tutup yang nonoverlapping dan $\lambda(I \supseteq G_1 \supseteq G_2) = \frac{64}{81}$

Merupakan masalah dalam menggambarkan tingkatan umum dari sebuah konstruksi yang dimulai seperti pada Gambar 4, dan menghitung ukuran dari poligon khusus setelah N langkah.

$$I \supseteq \bigcup_{k=1}^{N} G_k$$

Oleh karena itu diperlukan tingkatan definisi yang lebih umum.

Definisi 4: Himpunan Buka (Open Sets)

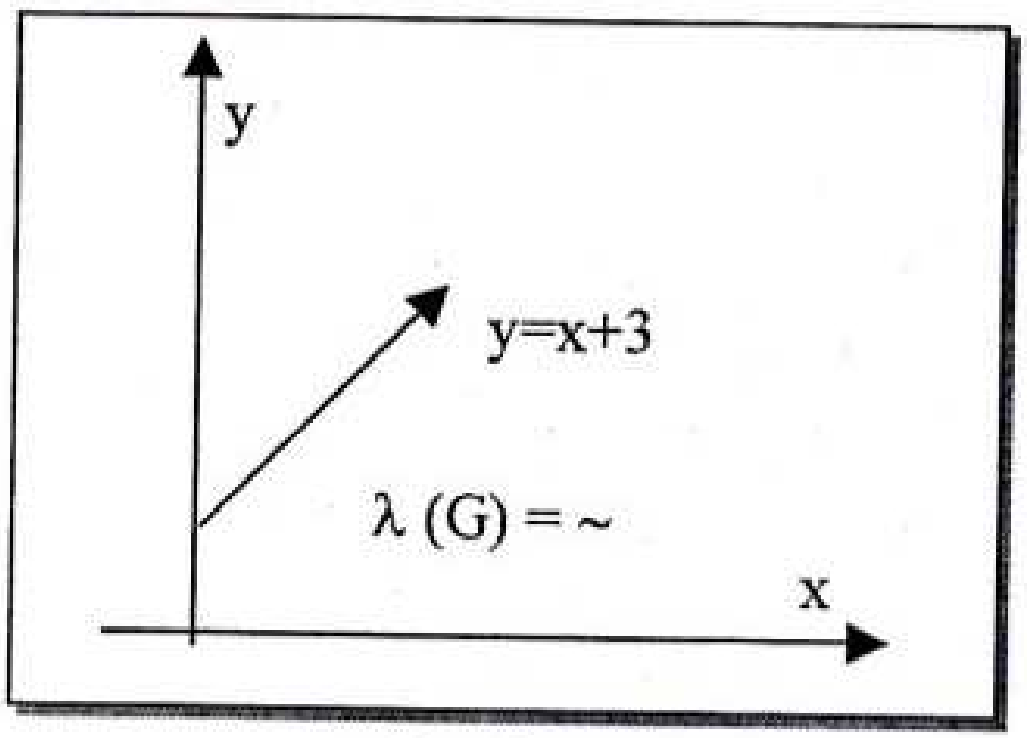
Kita kembali ke konstruksi dengan mendefinisikan ukuran dari suatu himpunan buka sebarang dalam R^n. Ini dilakukan dengan cara mengaproksimasi himpunan dengan poligon-poligon yang terdapat di dalam himpunan buka tersebut. Prosedur ini dapat dilakukan karena sifat topologi dari himpunan buka. Pendefinisian ukuran Lebesgue pada tingkatan ini adalah: Jika $G \subset R^n$ adalah suatu himpunan buka dan $G \neq \phi$ maka didefinisikan $\lambda(G) = \text{Sup}\{\lambda(P) | P \subset G, P \text{ suatu poligon khusus}\}$

Karena G buka dan tidak kosong maka G mempunyai titik-titik interior dan oleh karena itu terdapat poligon-poligon yang termuat dalam G. Akibatnya, memungkinkan bagi kita untuk mempertimbangkan batas atas terkecil dari himpunan bilangan-bilangan $\lambda(P)$ untuk $P \subset G$.

Apabila G terbatas maka berlaku $0 < \lambda(G) < \infty$

Apabila G tidak terbatas maka didefinisikan $\lambda(G) = \infty$

Secara khusus $\lambda(R^n) = \infty$. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar berikut ini dengan $G = \{(x,y) | x > 0 \text{ dan } y < x+3\}$ pada bidang R^2.



Gambar 5

Beberapa sifat:

$S_1 : 0 \leq \lambda(G) \leq \infty$

Bukti: Trivial

$S_2 : \lambda(G) = 0 \Leftrightarrow G = 2$

Bukti:

(i) ($\Leftarrow$)

Dari definisi 1 diperoleh $\lambda(G) = \lambda(2) = 0$

(ii) ($\Rightarrow$)

Akan ditunjukkan : $\lambda(G) = 0 \Rightarrow G = 0$

Andaikan $G \neq 2$

Jika $G \neq 2$ maka ada poligon khusus $P \subset G$ dan $P \neq 2$

Berdasarkan definisi 4, $\lambda(G) = \text{Sup}\{\lambda(P) \mid P \subset G \mid P$ suatu poligon khusus$\}$, sehingga diperoleh $\lambda(G) \geq \lambda(P) > 0$

Dengan demikian $\lambda(G) > 0$. Ini kontradiksi dengan $\lambda(G) = 0$

Jadi haruslah $\lambda(G) = 0 \Rightarrow G = 2$.

$S_3 : \lambda(R^n) = \infty$

Bukti:

Untuk sebarang $a \in R, a > 0$, [-a,a]x ..x[-a,a] sebanyak n suku adalah poligon khusus yang termuat dalam R^n

Dengan demikian $\lambda(R^n) \geq (2a)^n$, $\forall a \in R, a > 0$

Akibatnya $\lambda(R^n) = \infty$

$S_4 : G_1 \subset G_2 \Rightarrow \lambda(G_1) \leq \lambda(G_2)$

Bukti:

Karena $G_1 \subset G_2$ maka $\{\lambda(P) \mid P \subset G_1\} \subset \{\lambda(P) \mid P \subset G_2\}$.

$\lambda(G_2) = \text{Sup}\{\lambda(P) \mid P \subset G_2\}$ $\Rightarrow \lambda(G_2)$ merupakan batas atas dari $\{\lambda(P) \mid P \subset G_2\}$.

Akibat lainnya, $\lambda(G_2)$ juga merupakan batas atas dari $\{\lambda(P) \mid P \subset G_1\}$

Karena $\lambda(G_1)$ adalah supremum dari $\{\lambda(P) \mid P \subset G_1\}$ maka $\lambda(G_1) \leq \lambda(G_2)$

$$S_5 : \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k)$$

Bukti:

Misalkan P sebarang poligon khusus yang memenuhi definisi

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

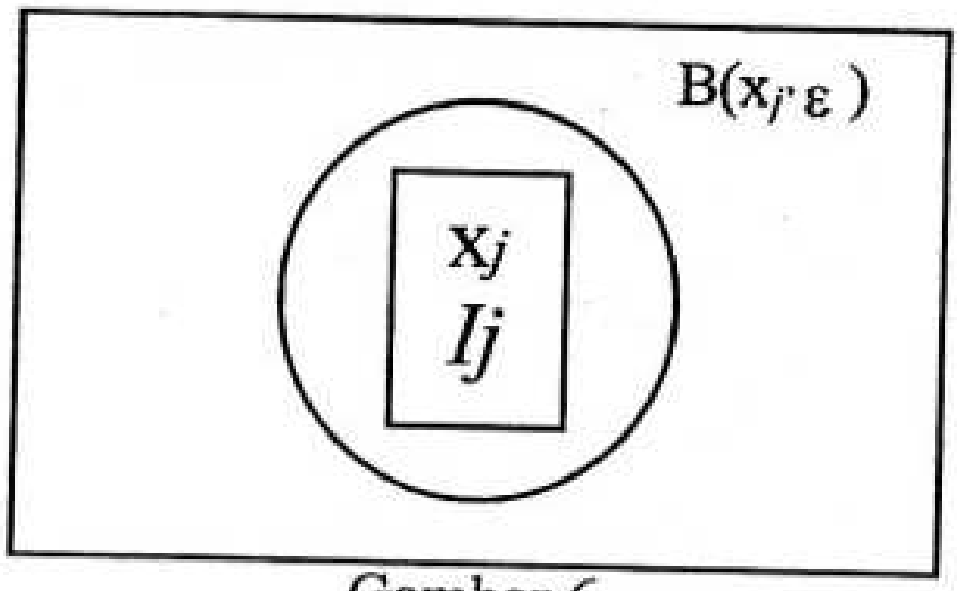
Karena P kompak, lemma pada halaman 2 menjamin eksistensi dari bilangan Lebesgue $\delta > 0$ dan memenuhi sifat $\forall x \in P \ \exists k \ni B(x,\delta) \subset G_k$

Dapat diasumsikan bahwa:

$$P = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$$ dengan $I_\times$ adalah segiempat yang nonoverlapping dari setiap bola buka yang diameternya kurang dari 2δ

Misalkan $I_\times$ sebarang segiempat khusus dengan pusatnya dilambangkan $x_\times$ maka $I_\times \subset B(x_\times,\delta) \subset G_k$ untuk suatu k.

Sebagai ilustrasi, dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 6

Dengan demikian setiap I× termuat dalam paling sedikit satu himpunan buka. Sekarang misalkan P_1 gabungan dari semua I× sedemikian sehingga I× $\subset G_1$. secara umum, kita definisikan P_k sebagai gabungan dari semua I× sedemikian sehingga I× $\subset G_k$ dan I×$\subset G_1, G_2,\ldots,G_{k-1}$. Hal ini dimungkinkan karena setiap I× termuat di dalam salah satu dari $G_1,G_2,\ldots,P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$.

Karena setiap I× hanya dapat menjadi anggota dari salah satu P_k maka paling banyak N dari P_k adalah himpunan tak kosong.

Himpunan tak kosong P_k adalah poligon dan $P_k \subset G_k$. Selain itu himpunan P_k adalah poligon khusus yang saling asing. Oleh karena itu, dengan menggunakan sifat K.2 diperoleh: $\lambda(P) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k)$

Karena P adalah sebarang poligon khusus yang termuat dalam $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$,

Maka berdasarkan definisi 4 diperoleh: $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k)$

$\le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k)$

S6 : Jika himpunan buka G_k disjoin maka $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k)$

Bukti:

Misalkan P_1, P_2, ... P_N adalah poligon khusus sebarang sedemikian sehingga $P_k \subset G_k$ untuk $1 \le k \le N$.

Karena G_k disjoin untuk $1 \le k \le N$ maka P_k juga disjoin, dan berlaku

$$\bigcup_{k=1}^{N} P_k \subset \bigcup_{k=1}^{N} G_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

Dengan menggunakan sifat K.2 diperoleh: $\sum_{k=1}^{N} \lambda(P_k) = \lambda(\bigcup_{k=1}^{N} P_k) \le$

$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$

Karena P_k sebarang dan $P_k \subset G_k$ sebarang maka $\sum_{k=1}^{N} \lambda(G_k) \le$

$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k)$.

Karena N sebarang maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k) \le \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) \cdots\cdots\cdots *)$$

Dari *) dan S_5 terbukti bahwa

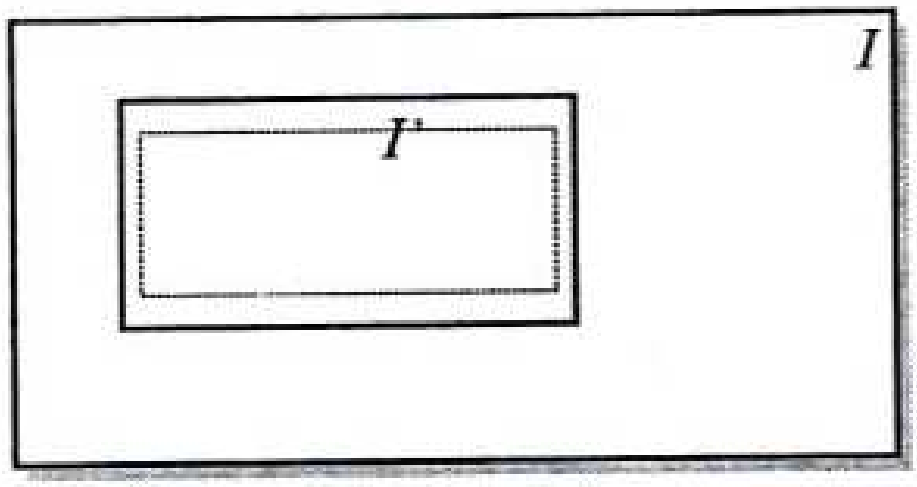
$$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k$$

S_7 : Jika P poligon khusus maka $\lambda(P) = \lambda(P^\circ)$

Bukti:

- Pertama akan ditunjukkan bahwa untuk sebuah bilangan segiempat khusus I berlaku $\lambda(I^\circ) \ge \lambda(I)$. Dalam hal ini, I° $= \{x \mid x$ titik interior I$\}$.

Pada suatu segiempat khusus berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada segiempat I' yang sedikit lebih kecil dari I sedemikian sehingga $I' \subset I^\circ$ dan $\lambda(I') > \lambda(I) - \varepsilon$



Gambar 7

$I' \subset I^0 \Rightarrow \lambda(I^0) \geq \lambda(I')$ .....[K.1]
$\lambda(I^0) \geq \lambda(I')$ dan $\lambda(I') > \lambda(I) - \varepsilon \Rightarrow \lambda(I^0) > \lambda(I') - \varepsilon$
Karena ε sebarang maka $\lambda(I^\circ) \geq \lambda(I)$ ..... #)

* Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda(P^\circ) \geq \lambda(P)$
Jika P poligon khusus yang dinyatakan dengan gabungan segiempat khusus yang saling asing dalam bentuk $P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ dan

$P^\circ = \{x \mid x$ titik interior $P\}$, maka

$$P^\circ \supset \bigcup_{k=1}^{N} I_k^o$$

$$P^\circ \supset \bigcup_{k=1}^{N} I_k^o \Rightarrow \lambda(P^o) \geq \lambda(\bigcup_{k=1}^{N} I_k^o)$$

.....[K.1]
Dengan menggunakan S_6 dan #) diperoleh

$$\lambda(P^o) \geq \sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k^o) \geq \sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k) = \lambda(P) \quad \text{atau} \quad \lambda(P^\circ) \geq \lambda(P)$$

* Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda(P^\circ) \leq \lambda(P)$
Misalkan $Q \subset P^\circ \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow \lambda(Q) \leq \lambda(P)$
Karena Q sebarang maka $\lambda(P^\circ) \leq \lambda(P)$
Karena $\lambda(P^\circ) \leq \lambda(P)$ dan $\lambda(P^\circ) \geq \lambda(P)$ maka dapat disimpulkan $\lambda(P^\circ) = \lambda(P)$
Berikut ini diberikan sebuah contoh menghitung ukuran Lebesgue dari suatu himpunan buka.

Contoh 4:
Misalkan $G = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ pada bidang R^2.
Jadi G suatu himpunan buka.
Selanjutnya akan dihitung ukuran Lebesgue (luas daerah) dari G dengan menggunakan definisi 4,
$\lambda(G) = \text{Sup}\{ \lambda(P) \mid P \subset G \mid P$ suatu poligon khusus$\}$.
Dalam G terdapat banyak poligon khusus. Salah satu cara menentukan poligon P dalam G adalah dengan membagi G ke dalam n bagian yang sama.
Ambil poligon khusus P sebarang dalam G.
Diperoleh:
$I_1 = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{n}, 0 < y < x\}$
$I_2 = \{(x,y) \mid \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, 0 < y < x\}$
*
*
*
$I_n = \{(x,y) \mid \frac{n-1}{n} < x < 1, 0 < y < x\}$

Sehingga

$P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ dengan $\lambda(P) = \lambda(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k)$

Karena $\lambda(I_1) = \frac{1}{n} .0$

$\lambda(I_2) = \frac{1}{n} . \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}$

*

*

*

$\lambda(I_n) = (\frac{1}{n})(\frac{n-1}{n})$

maka

$\lambda(P) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) = \frac{0+1+...+(n-1)}{n^2}$

$= \frac{(n-1)(n)}{2n^2}$

$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$

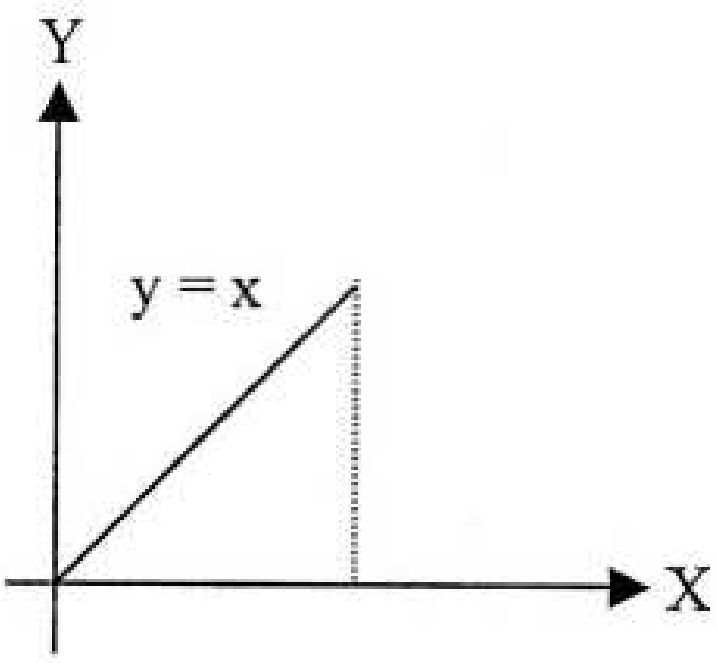
Dalam contoh di atas, mudah dipahani bahwa supremum dari $\lambda(P)$ untuk P sebarang dalam G ditemukan apabila partisinya semakin kecil atau $n \to \infty$.

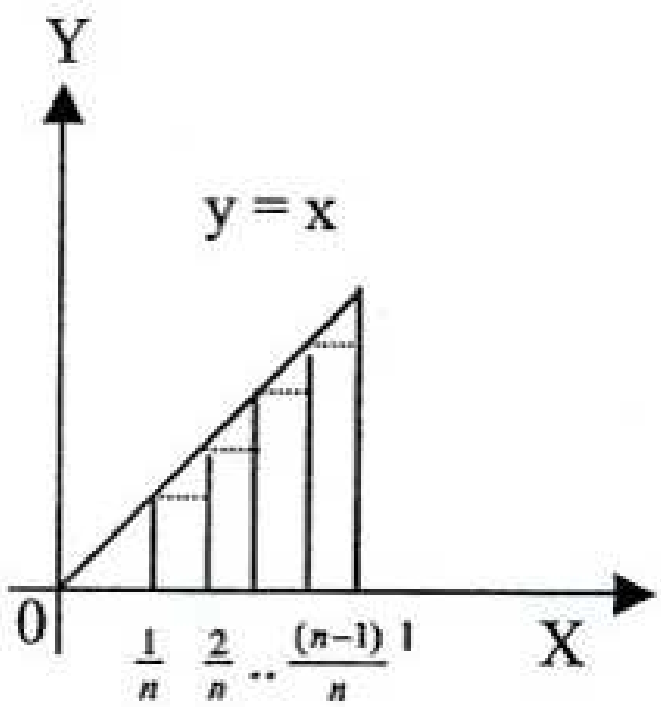
Dengan demikian diperoleh.

$\lambda(G) = Sup\{ \lambda(P) \mid P \subset G \mid P$ poligon khusus$\}$.

Jadi $\lambda(G) = \frac{1}{2}$

Contoh di atas dapat diilustrasikan seperti berikut ini.





Definisi 5: Himpunan kompak

Sekarang akan didefinisikan ukuran dari sebarang himpunan kompak dalam R^n. Pendefinisian ini dilakukan dengan aproksimasi himpunan dan himpunan tersebu tidak harus suatu himpunan buka.

Jika $K \subset R^n$ adalah himpunar kompak, maka didefinisikan

$\lambda(K) = \inf \{\lambda(G) \mid K \subset G,\ G$ himpunan buka $\}$

Kita dihadapkan pada suatu masalah dengan himpunan K yang mungkin mempunyai dua arti, yaitu jika K himpunan kompak yang juga sebuah poligon khusus. Oleh karena itu kita perlu menunjukkan bahwa definisi $\lambda(K)$ ini memberikan bilangan yang sama untuk ukuran dari K seperti definisi 3. Berikut ini akan ditunjukkan kesamaan tersebut.

Misalkan P poligon khusus dan misalkan

$\alpha =$ "$\lambda(P) = \sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k)$" [definisi 3]

$\beta =$ "$\lambda(P) = \inf \{ \lambda(G) \mid P \subset G =$ himpunan buka$\}$

Akan dibuktikan: $\alpha = \beta$

Misalkan G himpunan buka sebarang dengan $P \subset G$

$P \subset G \Rightarrow \lambda(P) \leq \lambda(G)$.

$\Rightarrow \alpha \leq \lambda(G)$

Karena G sebarang dan $P \subset G$ maka $\alpha \leq \inf\{ \lambda(G) \mid P \subset G\}$ atau

$\alpha \leq \beta$ ...(*)

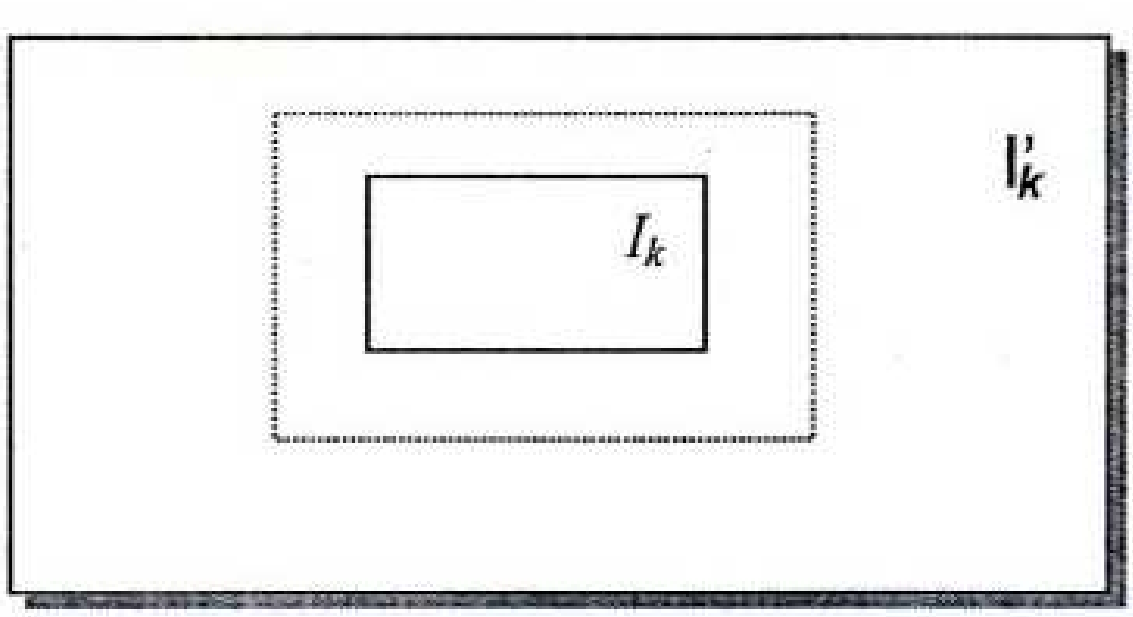
Selanjutnya misalkan

$P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ menyatakan poligon khusus yang melibatkan segiempat khusus I_k yang saling asing.

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ pilih segiempat khusus I'_k sedemikian sehingga

$I_k \subset I'_k$ dan $\lambda(I'_k) < \lambda(I_k) + \frac{\varepsilon}{N}$

Sebagai ilustrasi, perhatikan gambar berikut.



Gambar. 8

(Gambar 8 diatas situasinya terbalik dengan Gambar 7)
Sekarang, misalkan

$$G = \bigcup_{k=1}^{N} (I'_k)^o$$

Himpunan G buka dan $P \subset G \Rightarrow \beta$

$$\leq \lambda(G) = \lambda(\bigcup_{k=1}^{N} I'_k)^o$$

$$\Rightarrow \beta \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda(I'_k)^o = \sum_{k=1}^{N} \lambda(I'_k)$$

$$< \sum_{k=1}^{N} (\lambda(I_k) + \tfrac{\varepsilon}{N})$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (\lambda(I_k) + \sum_{k=1}^{N} \tfrac{\varepsilon}{N} = \lambda(P) + \varepsilon$$

$= \alpha + \varepsilon$
Jadi $\beta < \alpha + \varepsilon$
Karena ε sebarang maka $\beta \leq \alpha$ ...(**)
Dari (*) & (**) disimpulkan $\beta = \alpha$
Ini menunjukkan definisi 5 konsisten dengan definisi 3
Sifat-sifat:
C1: $0 \leq \lambda(K) < \infty$
Bukti: Trivial
C2: $K_1 \subset K_2 \Rightarrow \lambda(K_1) \subset \lambda(K_2)$
Bukti:
Jelas, karena setiap himpunan buka yang memuat K_2 juga memuat K_1.
C3: $\lambda(K_1 \cup \lambda(K_2) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$
Bukti:
$K_1 \subset G_1$ dan $K_2 \subset G_2 \Rightarrow K_1 \cup K_2 \subset G_1 \cup G_2$
$\Rightarrow \lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(G_1 \cup G_2)$
$\Rightarrow \lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$ ..... S_5
Karena G_1 dan G_2 sebarang maka
$\lambda(K_1 \cup K_2) \leq \inf\{\lambda(G_1) | K_1 \subset G_1, G_1$ himp. Buka$\} + \inf\{\lambda(G_2) | K_2 \subset G_2, G_2$ himp. buka$\}$
atau $\lambda(K_1 \cup K_2 \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)]$
C4: Jika himpunan kompak K_1 dan K_2 disjoin maka $\lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$
Bukti:
Dengan Corollary pada halaman 2
$\exists \varepsilon > 0$ sedemikian sehingga
$x_1 \in K_1, y \in K_2 \Rightarrow d(x,y) \geq \varepsilon$
Misalkan G sebarang himpunan buka sedemikian sehingga $K_1 \cup K_2 \subset G$
Didefinisikan:

$$G_i = G \cap \bigcup_{x \in K_i} B(x, \tfrac{\varepsilon}{2}) \text{ untuk } I = 1,2$$

..., berarti G_1 suatu himpunan buka.

Jelas bahwa $K_i \subset G_i \subset G$. Lebih jauh pilihan ε menjamin bahwa $G_1 \cap G_2 = \bullet$, Oleh karena itu diperoleh:

$\lambda(K_1) + \lambda(K_2) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$
$= \lambda(G_1 \cup G_2) \ldots [S_6] \leq \lambda(G)$

G sebarang dan $K_1 \cup K_2 \subset G \Rightarrow$
$\lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(k_1) + \lambda(k_2) \ldots *)$

Dari *) dan C_3 dapat disimpulkan bahwa $\lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(k_1) + \lambda(k_2)$

C. PENUTUP

Dari uraian di atas dapat ditemukan beberapa hal berikut.

1. Pengetahuan tentang konstruksi ukuran Lebesgue ini diperlukan bagi mereka yang ingin mendalami konsep-konsep pengintegralan.
2. Makalah ini bersifat konstruktif, artinya menggkonstruksi uku-ran Lebesgue yang terdiri dari 5 definisi, yaitu
   a. Definisi 1: mendefinisikan ukuran Lebesgue dari suatu himpunan kosong.
   b. Definisi 2: mendefinisikan ukuran Lebesgue dari suatu segiempat khusus.
   c. Definisi 3: mendefinisikan ukuran Lebesgue dari suatu poligon khusus.
      Pada tahapan ini disadari ada kesulitan dalam menunjukkan bahwa definisi ini well defined, tetapi masih dapat diterima secara intuitif.
   d. Definisi 4: mendefinisikan ukuran Lebesgue dari suatu himpunan buka dengan mengaproksimasi himpunan dengan poligon-poligon yang ada dalam himpunan buka trsebut. Hal ini dimungkinkan karena sifat himpunan buka yang tidak kosong selalu mempunyai titik interior.
   e. Definisi 5: mendefinisikan ukuran Lebesgue dari suatu himpunan kompak dengan mengaproksimasi himpunan kompak dengan himpunan-himpunan buka yang memuat himpunan kompak tersebut. Ini di-mungkinkan karena definisi kompak menjamin adanya himpunan buka yang mmemuat himpunan kompak tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, G Robert. 1966. *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons. USA.

Bartle, G Robert. 1982. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons. USA.

De Barra. 1981. *Measure Theory and Integration*. John Wiley & Sons. USA.

Frank Jones. 1993. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett Publisher. USA.

Royden. H. L. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company New York & Collier Macmillan Publishing London

Torchinsky, Alberto. 1988. *Real Variables*. Addison Wesley Publishing Company. USA.

Williamson. 1962. *Lebesgue Integration*. Holt, Rinehart and Winston. USA.